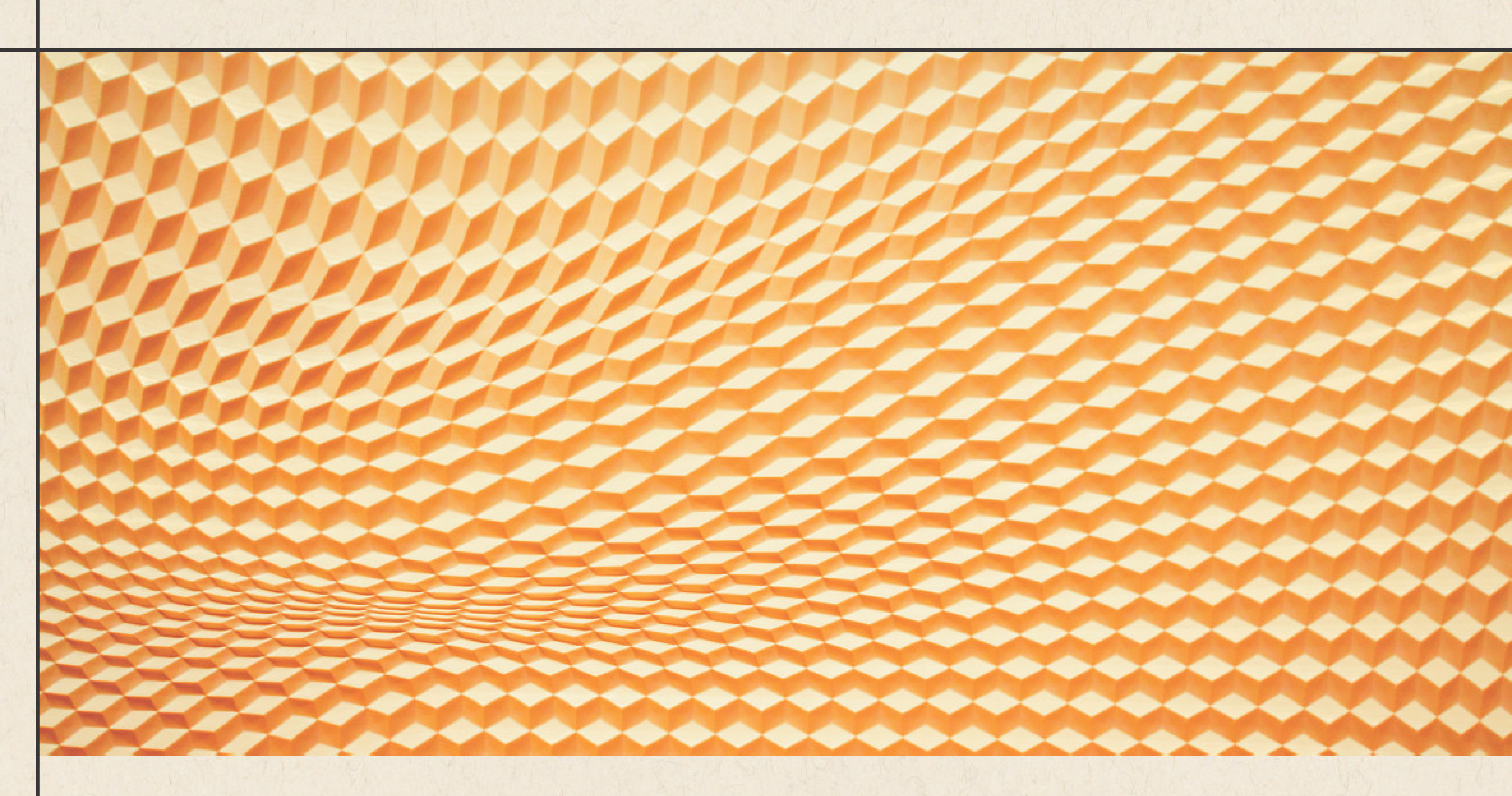
应用型高等院校大学数学特色教材

大学数学（微积分）



孙德红
石莲英
曾健民
主编

清华大学出版社

大学数学(微积分)

孙德红　石莲英　曾健民　主编

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书共分8章,内容包括函数、极限与连续,一元函数微分学,一元函数积分学,微分方程,空间解析几何与向量代数,多元函数微分学及其应用,多元函数积分学、无穷级数。书后还附有习题答案和常用积分公式。

本书适用于应用型高等院校理工类和经济类专业的公共数学课。本书还配有学习辅导书,便于学生学习使用。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学.微积分/孙德红,石莲英,曾健民主编.—北京:清华大学出版社,2019
ISBN 978-7-302-53185-2

Ⅰ.①大… Ⅱ.①孙… ②石… ③曾… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 ②微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O13 ②O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第110375号

责任编辑:孟毅新
封面设计:傅瑞学
责任校对:赵琳爽
责任印制:杨 艳

出版发行:清华大学出版社
网 址:http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地 址:北京清华大学学研大厦A座 **邮 编**:100084
社 总 机:010-62770175 **邮 购**:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载:http://www.tup.com.cn,010-62770175-4278
印 装 者:北京国马印刷厂
经 销:全国新华书店
开 本:185mm×260mm **印 张**:20.5 **字 数**:468千字
版 次:2019年8月第1版 **印 次**:2019年8月第1次印刷
定 价:48.00元

产品编号:082778-01

前言

FOREWORD

随着我国经济、社会的发展，为了适应应用型高等数学教育的教学改革和教材建设的需求，我们组织了一批有丰富教学经验的教师编写了本书。本书以应用、实用和适用为基本原则，淡化理论并突出实践。在本书的编写过程中，我们结合应用型本科和高职高专的特点，对比较烦琐的定理、公式的推导和证明尽可能只给出结果或简单直观地给出几何说明；对例题的选择由浅入深，讲述尽可能深入浅出，力求具有一定的启发性和应用性。

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的一门科学，大学数学是应用型本科和高职高专学生的一门必修课，不但对发展学生逻辑思维能力和空间想象能力有不可替代的作用，而且在其他领域与学科中也发挥着十分重要的作用。大学数学是一门非常重要的基础课，不但内容丰富、理论严谨，而且应用广泛、影响深远，为学习后续课程和进一步扩大知识面奠定必要的基础，帮助学生培养综合利用所学知识分析问题和解决问题的能力，增强学生的自主学习能力和创新能力。所以编写一本适合的应用型大学数学教材是一项十分有意义的工作。

在本书的编写过程中，我们参考了大量的同类图书，特别是参考了一些典型例题和习题，它们是各位老师教学经验的积累，对本书中例题和习题的编写起到了很大的帮助作用，特此说明并致谢。本书中有的章节有加“*”或“**”的内容，属于附加内容，供有此需求的专业选用。

本书由闽南理工学院孙德红、石莲英、曾健民主编。本书在编写过程中，得到了闽南理工学院领导的具体指导，以及很多教师的协助，在此表示衷心的感谢！

由于我们水平有限，书中难免有不足之处，敬请有关专家、学者及使用本书的师生批评指正，以帮助我们不断改进。

编　者

2019 年 6 月

目录


CONTENTS

第1章

函数、极限与连续

初等数学研究的对象主要是一些有限的、孤立的、静止的事物,而高等数学则更多地研究运动的、相互联系的事物,而且往往要用无限的眼光来处理问题。函数是数学中最重要的基本概念之一,是现实世界中各种变量相互依存关系的一种抽象,也是高等数学的主要研究对象;极限概念是在研究变量在某一过程中的变化趋势时引出的,是微积分的重要工具。高等数学中的许多重要概念,如连续、导数、定积分等都是建立在极限的基础之上,而极限方法也是我们研究函数的一种最基本的方法。本章将介绍函数、极限及函数的连续性等基本概念和它们的一些性质。

1.1 函数

1.1.1 集合初步

1. 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念。集合论是德国数学家康托于19世纪70年代创立的,它是现代数学的基石。我们先通过例子来说明集合这个概念。例如,一个学校的全体女生构成一个集合,图书馆的数学类藏书构成一个集合,全体自然数构成一个集合等。一般地,所谓**集合**(简称**集**)是指具有某种特定性质的事物的总体,用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示。组成集合的事物称为集合的**元素**(简称**元**),用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示。如果 a 是集合 A 的元素,则说 a 属于 A,记作 $a\in A$;否则记作 $a\notin A$。一个集合,若它只含有限个元素,则称为**有限集**,否则称为**无限集**。

表示集合的方法通常有两种:一种是**列举法**,就是把集合的全体元素一一列举出来。例如,由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A 可表示为

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

另一种是**描述法**,若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成,则 M 可表示为

$$M = \{x \mid x\text{具有性质}P\}$$

例如，集合 B 是方程 $x^2-1=0$ 的解集，则 B 可表示为

$$B = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$$

下面介绍几个常用数集。

全体非负整数即自然数构成的集合，称为**自然数集**，记作 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N} = \{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

全体正整数的集合为

$$\mathbf{N}^+ = \{1,2,3\cdots,n,\cdots\}$$

全体整数构成的集合称为**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$，即

$$\mathbf{Z} = \{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

全体有理数构成的集合称为**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$，即

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{p}{q}\,\middle|\, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^+ \text{ 且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}$$

全体实数构成的集合称为**实数集**，记作 $\mathbf{R}$。$\mathbf{R}^*$ 表示除了数 0 外的实数集，$\mathbf{R}^+$ 表示正实数集。

若集合 A 的所有元素都是集合 B 的元素，即对任意 $x\in A$，则必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$（读作 A 包含于 B）或 $B\supseteq A$（读作 B 包含 A）。

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A=B$。例如：

$$A = \{1,3\}$$
$$B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$$

则 $A=B$。

若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subsetneqq B$。例如，$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$。

不包含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$。例如，集合 $\{x \mid x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x^2+1=0\}$ 就是空集。空集是任何集合的子集。

2. 集合的运算

设 A,B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**（简称**并**），记作 $A\cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

设 A,B 是两个集合，由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**（简称**交**），记作 $A\cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

设 A,B 是两个集合，由所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**差集**（简称**差**），记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

如果我们研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行，则所研究的其他集合 A 都是 I 的子集。此时，我们称集合 I 为**全集**或**基本集**；称 $I\backslash A$ 为 A 的**余集**或**补集**，记作 A^C。

例如，在实数集 $\mathbf{R}$ 中，集合 $A=\{x|0<x\leqslant 2\}$ 的余集就是

$$A^{C}=\{x\,|\,x\leqslant 0 \text{ 或 } x>2\}$$

3. 集合运算的法则

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C), (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4) 对偶律：$(A\cup B)^{C}=A^{C}\cap B^{C}, (A\cap B)^{C}=A^{C}\cup B^{C}$。

*4. 直积(笛卡儿乘积)

设 A,B 是任意两个集合，在集合 A 中任意取一个元素 x，在集合 B 中任意取一个元素 y，组成一个有序对 (x,y)，把这样的有序对作为新元素，它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的**直积**(或**笛卡儿乘积**)，记作 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A \text{ 且 } y\in B\}$$

例如，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)|x\in\mathbf{R} \text{ 且 } y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$。

5. 区间和邻域

1) 有限区间

设 $a<b$，称数集 $\{x|a<x<b\}$ 为**开区间**，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$$

类似地，$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$ 和 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$ 都称为**半开区间**。其中，a 和 b 称为区间的**端点**，$b-a$ 称为**区间的长度**。

2) 无限区间

只有一个端点的区间称为无限区间。例如：

$$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\} \qquad [a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$$

$$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\} \qquad (-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}$$

我们可以用数轴来表示区间，如图 1-1-1 所示。

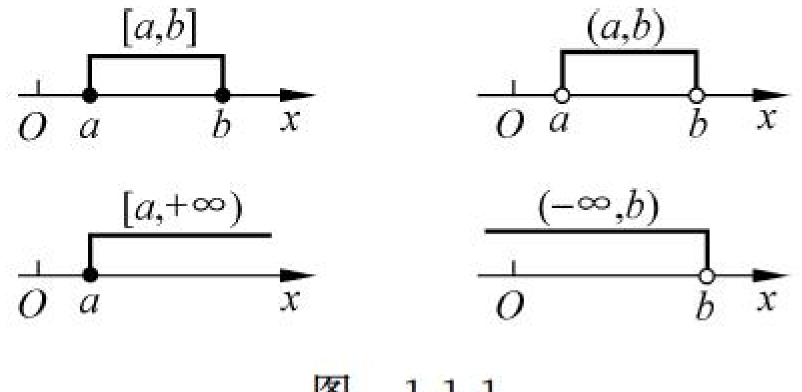


图　1-1-1

实数集 $\mathbf{R}$ 也可以记作 $(-\infty,+\infty)$，其中 ∞ 只是一个数学符号，由英国数学家沃利斯(1616—1703)于 1655 年引入，读作“无穷大”。注意，我们不能把它当作实数看。

3) 邻域

邻域是一个经常用到的概念。以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的**邻域**，记作

$U(a)$。

设 δ 是一正数，则称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\,\|\,x-a\,|<\delta\}$$

其中，点 a 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**(图 1-1-2)。有时用到的邻域不包含中心，点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的**去心$\boldsymbol{\delta}$ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$(图 1-1-3)。



图 1-1-2　　图 1-1-3

1.1.2 函数的概念

1. 常量与变量

在日常生活、生产活动和经济活动中，人们经常会遇到各种各样的量，如温度、浓度、产量、成本、面积等。宇宙间一切事物都在不断地变化，变化是绝对的，不变是相对的。在观察事物的过程中，变化着的量称为变量；相对不变的量称为常量。例如，一段时间内银行的资金运作过程中，借贷资金的数额不断变化，是变量；而利率不变，是常量。

一个量是变量还是常量，不是固定不变的。在一定的条件下，常量和变量可以互相转化。

2. 函数的定义

在某个变化过程中，往往出现多个变量，这些变量不是彼此孤立的，而是相互影响、相互制约的，一个量或一些量的变化必将引起另一个量或另一些量的变化。倘若这些影响是确定的，是遵循某一规则的，那么我们就说这些变量之间存在着函数关系。

例如，生产某种产品的固定成本为 5000 元，每生产一件产品，成本增加 40 元，则该产品的总成本 y 与产量 x 之间的关系可以表示为

$$y=40x+5000$$

当产量 x 取任何一个合理的值时，总成本 y 有确定的值与它对应，我们说总成本 y 是产量 x 的函数。

定义 1-1-1　设 D 是某一非空实数集，如果对于变量 x 在 D 中的每一个取值，变量 y 按照一定的法则 f，总有唯一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),\quad x\in D$$

这里，称 x 为自变量，y 为因变量或函数。f 是函数符号，它表示 x 与 y 的对应法则。集合 D 称为函数的**定义域**，记作 D_f；所有相应的 y 值所组成的集合称为函数的**值域**，记作 R_f 或 $f(D)$。

注：

(1) 函数的概念中涉及 5 个因素：①自变量；②定义域；③因变量；④对应法则；

⑤值域。在这5个因素中最重要的是定义域和因变量关于自变量的对应法则，这两者常称为函数的二要素。只有定义域与对应法则都相同的两个函数才是相同的函数。

*(2) 在定义1-1-1中，我们用“唯一确定”来表明所讨论的函数都是单值的。所谓单值函数就是对于D中每一个x，有且只有一个y的值与之对应。而对于D中每一个x，有多于一个y的值与之对应的函数，称为多值函数。本书我们只讨论单值函数，请读者注意。

例 1-1-1　设$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，求$f\left(\frac{3}{\pi}\right)$，$f(-x)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$，$f(x^2+1)$。

解

$$f\left(\frac{3}{\pi}\right)=\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}\pi}{6},\quad f(-x)=\frac{1}{-x}\sin\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=x\sin x,\qquad f(x^2+1)=\frac{1}{x^2+1}\sin\frac{1}{x^2+1}$$

例 1-1-2　设$f(x+1)=x^2-3x$，求$f(x)$。

解　令$t=x+1$，则$x=t-1$，于是有

$$f(t)=(t-1)^2-3(t-1)=t^2-5t+4$$

所以

$$f(x)=x^2-5x+4$$

例 1-1-3　求函数$f(x)=\sqrt{x^2-x-6}+\lg(16-x^2)$的定义域。

解　$\sqrt{x^2-x-6}$的定义域为$x^2-x-6\geqslant 0$，解得$x\geqslant 3$或$x\leqslant -2$；而$\lg(16-x^2)$的定义域是$16-x^2>0$，解得$-4<x<4$。所求函数的定义域是这两个函数的定义域的公共部分，即$x\in(-4,-2]\cup[3,4)$。

例 1-1-4　下列各对函数是否为同一函数？

(1) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=\sin^2x+\cos^2x$，$g(x)=1$；

(3) $y=f(x)$，$u=f(t)$。

解　(1) 不相同。因为对应法则不同，事实上$g(x)=|x|$。

(2) 相同。因为定义域与对应法则都相同。

(3) $y=f(x)$与$u=f(t)$是表示同一函数，因为对应法则相同，函数的定义域也相同。

由此可知一个函数由定义域与对应法则完全确定，而与用什么字母表示无关。

3. 函数的表示法

表示函数的方法有许多，最常见的有表格法、图像法及解析法（又称公式法）。

(1) 表格法：把自变量的一系列数值与对应的函数值列成表来表示它们的对应关系。

(2) 图像法：用一条平面曲线表示自变量与函数的对应关系，它是函数关系的几何表示。

(3) 解析法：用数学式子表示自变量与函数的对应关系。

例如，某邮局规定邮寄信件重量不超过 50 克支付邮资 0.8 元；超过 50 克部分按 0.1 元/克支付邮资；信件重量不得超过 500 克。则邮资与信件重量的关系可由解析表达式表示为

$$y=\begin{cases}0.8 & 0<x\leqslant 50\\ 0.8+0.1(x-50) & 50<x\leqslant 500\end{cases}$$

该函数的定义域为(0,500]，但它在定义域内不同的区间上是用不同的解析式来表示的，这样的函数称为**分段函数**。分段函数表示一个函数。

例 1-1-5 作出分段函数 $f(x)=\begin{cases}0 & -1<x\leqslant 0\\ x^2 & 0<x\leqslant 1\\ 3-x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 的图像，并求函数的定义域及 $f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f\left(\frac{3}{2}\right)$。

解 先作出分段函数的图像(图 1-1-4)。函数 $f(x)$的定义域为(−1,2]。

由于$\frac{1}{2}\in(0,1]$，故 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$。

同理由$\frac{3}{2}\in(1,2]$得 $f\left(\frac{3}{2}\right)=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$。

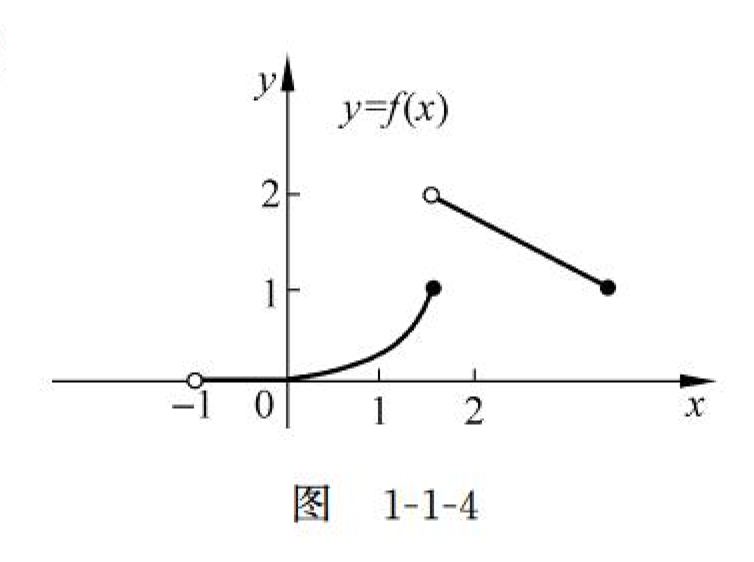


图 1-1-4

下面再举几个常用、特殊的函数。

例 1-1-6 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

称为**绝对值函数**(图 1-1-5)。其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R=[0,+\infty)$。

例 1-1-7 函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**(图 1-1-6)。其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R=\{-1,0,1\}$。

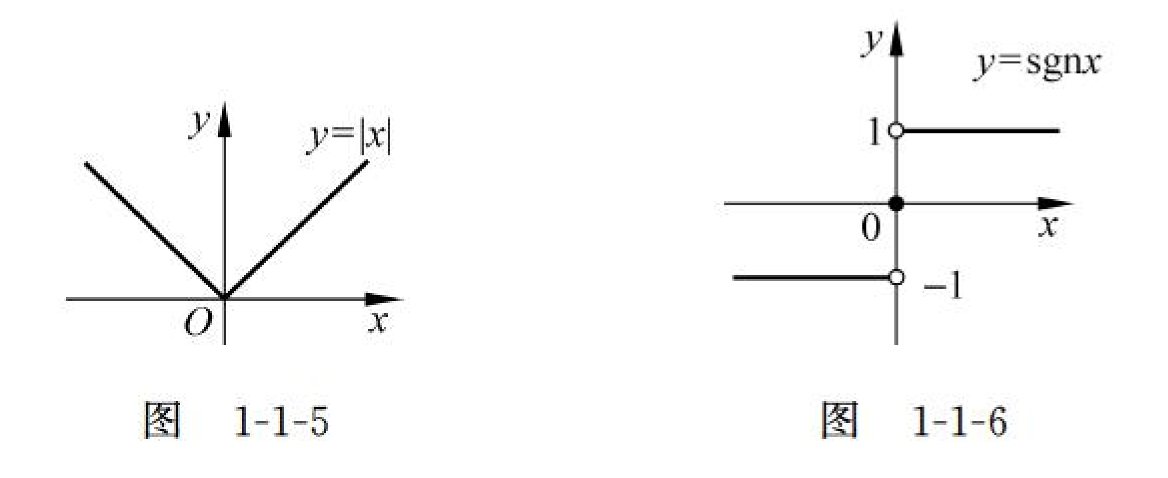


图 1-1-5　　图 1-1-6

例 1-1-8 设 x 为任意实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作$[x]$。函数$y=[x]$称为**取整函数**(图 1-1-7)，其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R=\mathbf{Z}$。例如：

$\left[\frac{5}{7}\right]=0,[\sqrt{2}]=1,[\pi]=3,[-1]=-1,[-3.5]=-4$。

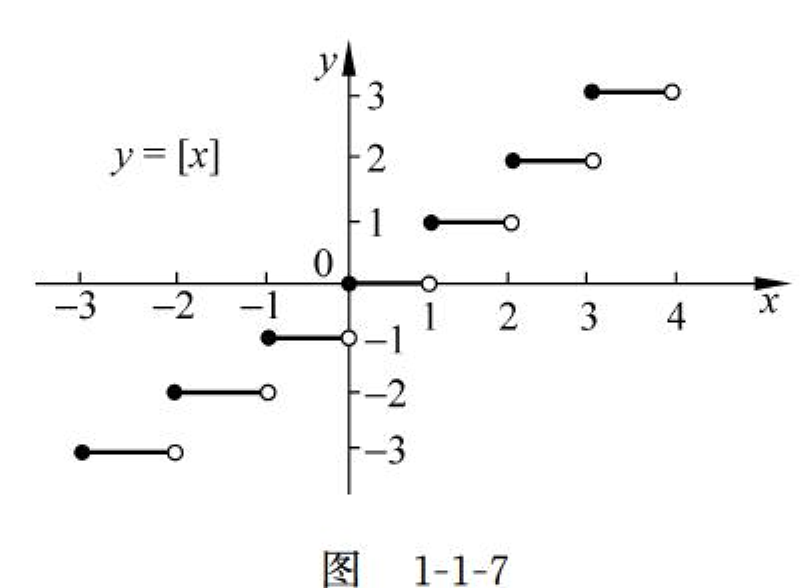


图　1-1-7

*例 1-1-9　狄利克雷函数**

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbf{Q}\\ 0 & x\in\mathbf{Q}^{C}\end{cases}$$

的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\{0,1\}$,无法用图像表示。

1.1.3　函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

定义 1-1-2　设函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于原点对称,如果对任意的 $x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为**偶函数**;若有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为**奇函数**。

例如,$y=\cos x$,$y=x^2$ 都是偶函数;$y=\sin x$,$y=x^3$ 都是奇函数;$y=x+2$ 是非奇非偶函数。

例 1-1-10　判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$的奇偶性。

解　函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$,关于原点对称。对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,有

$$f(-x)=\ln[-x+\sqrt{1+(-x)^2}]=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$
$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

所以函数是奇函数。

在几何上,偶函数的图像关于 y 轴对称(图 1-1-8);奇函数的图像关于原点对称(图 1-1-9)。

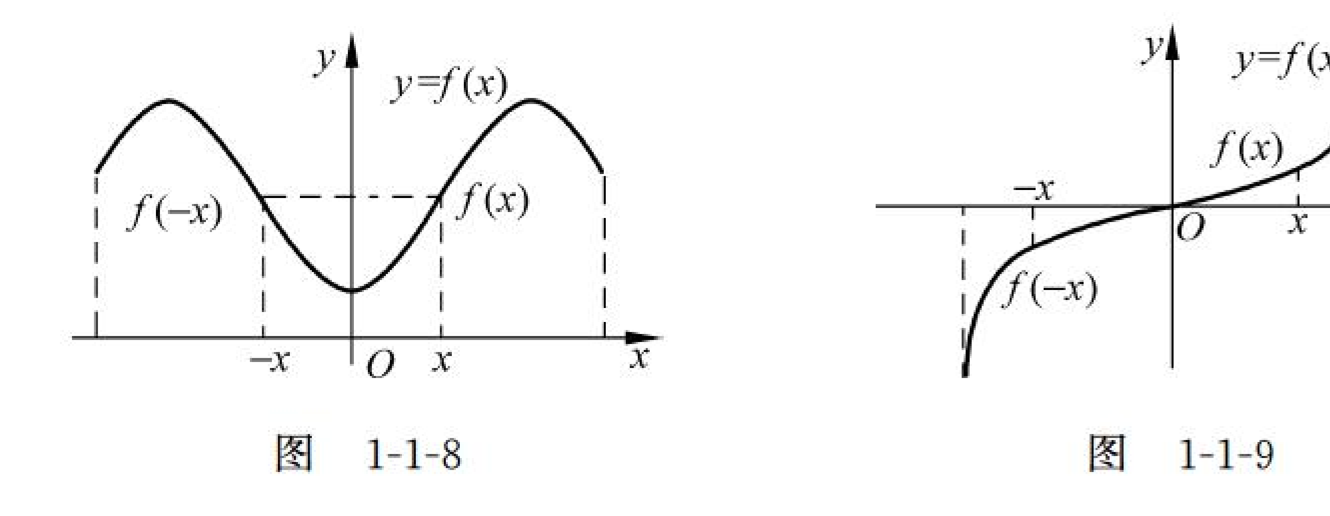


图　1-1-8　　图　1-1-9

2. 函数的单调性

定义 1-1-3　设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$,对于任意的 $x_1,x_2\in I$,若 $x_1<x_2$,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数在区间 I 内**单调增加**；若 $x_1<x_2$,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数在区间 I 内**单调减少**。单调增加或单调减少的函数,统称为**单调函数**。相应的区间称为函数的**单调区间**。

在几何上,单调增加的函数的图像沿 x 轴正向上升(图 1-1-10),单调减少的函数的图像沿 x 轴正向下降(图 1-1-11)。

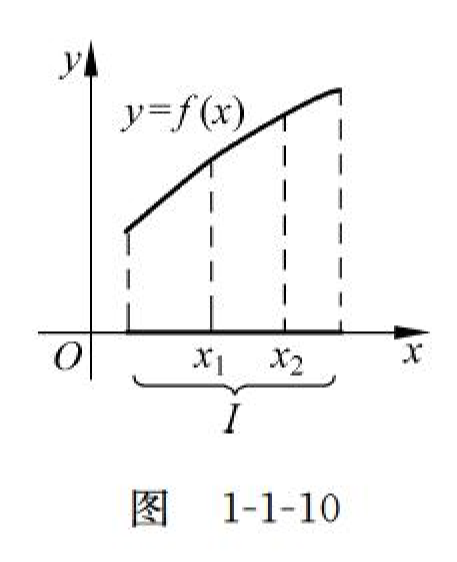


图　1-1-10

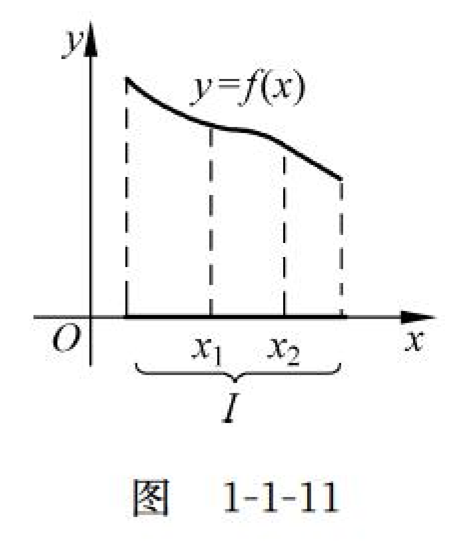


图　1-1-11

例 1-1-11　证明函数 $f(x)=5x-2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的。

证明　取任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,由于

$$f(x_1)-f(x_2)=(5x_1-2)-(5x_2-2)=5(x_1-x_2)<0$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$,故函数 $f(x)=5x-2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的。证毕。

3. 函数的有界性

定义 1-1-4　设函数 $y=f(x)$在集合 D 上有定义,如果存在正数 M,对于任意 $x\in D$,都有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在 D 上是**有界**的；否则称函数 $f(x)$在 D 上是**无界**的。

函数 $y=f(x)$在区间 I 内有界的几何意义是：曲线在区间 I 内被限制在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条直线之间(图 1-1-12)。

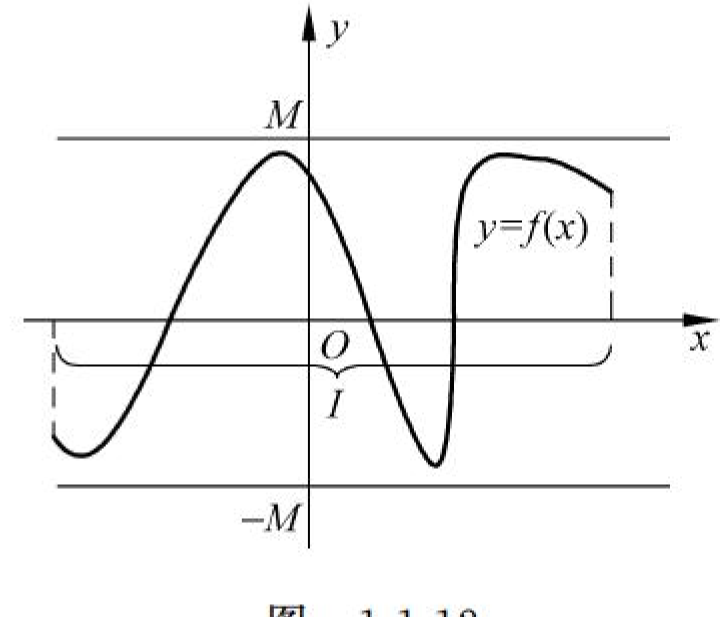


图　1-1-12

注：

(1) 一个函数在某区间内有界,正数 M 的取法不是唯一的。例如,$y=\sin x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是有界的,因为$|\sin x|\leqslant 1=M$。我们还可以取 $M=2$,实际上 M 可以取任何大于 1 的数。

(2) 有界性跟区间有关。例如,$y=\dfrac{1}{x}$在区间(1,2)内有界,但在区间(0,1)内无界。

4. 函数的周期性

定义 1-1-5　设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,如果存在正数 l,使得对于任意 $x\in D$ 且 $x+l\in D$,总有 $f(x+l)=f(x)$成立,则称此函数为**周期函数**。满足该等式的最小正数 l

称为函数的**最小正周期**,通常简称为**周期**。

例如,$y=\sin x$ 是周期函数,周期为 2π;$y=\tan x$ 的周期为 π;常数函数 $y=C$ 也是周期函数,任何正实数都是它的周期,但没有最小正周期(因为最小的正实数是不存在的)。有兴趣的读者还可以自行讨论例 1-1-9 狄利克雷函数的周期性。

周期为 l 的函数,在每个以 l 为长度的区间上,函数的图像是相同的(图 1-1-13)。

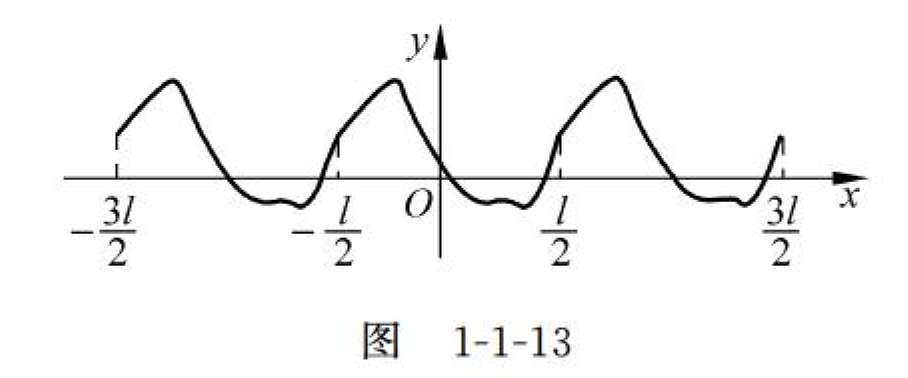


图　1-1-13

1.1.4　反函数与复合函数

1. 反函数

设某种商品的单价为 p,销售量为 x,则收入 y 是 x 的函数:

$$y=px$$

这时 x 是自变量,y 是 x 的函数。若已知收入 y,反过来求销售量 x,则有

$$x=\frac{y}{p}$$

这时 y 是自变量,x 变成了 y 的函数。上面两个式子是同一关系的两种写法,但从函数的角度来看,由于对应规则不同,它们是两个不同的函数,我们称它们互为反函数。

定义 1-1-6　设 $y=f(x)$是定义在 D 上的函数,值域为 R_f。如果对于任意的 $y\in R_f$,通过关系式 $y=f(x)$,都有唯一确定的 $x\in D$ 与之对应,则称这样确定的函数 $x=\varphi(y)$为函数 $y=f(x)$的**反函数**,原来的函数 $y=f(x)$称为**直接函数**。

事实上,$y=f(x)$与 $x=\varphi(y)$互为反函数。

习惯上用 x 表示自变量,而用 y 表示函数,因此,往往把反函数 $x=\varphi(y)$改写成 $y=\varphi(x)$,称为 $y=f(x)$的**矫形反函数**,简称为**反函数**,记作 $y=f^{-1}(x)$。

例 1-1-12　求函数 $y=f(x)=3x+1$ 的反函数。

解　由 $y=3x+1$ 得

$$x=f^{-1}(y)=\frac{y-1}{3}$$

交换 x 和 y,得 $y=\dfrac{x-1}{3}$,即为 $y=3x+1$ 的反函数。

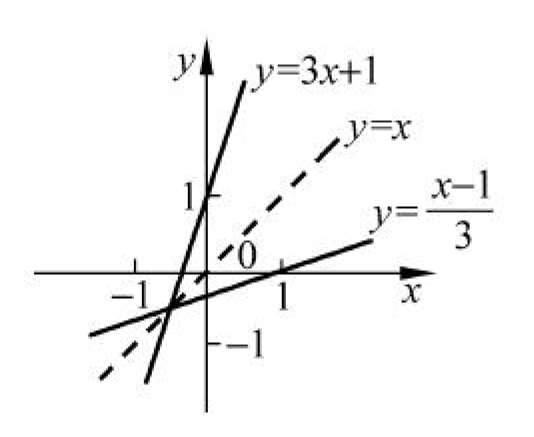


图　1-1-14

可以证明函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称。例 1-1-12 这一对反函数的图像如图 1-1-14 所示。

一个函数若存在反函数,则它们必定是一一对应的。特别地,单调函数一定存在反函数。

2. 复合函数

在经济活动中，我们会遇到这样的问题：一般来说成本 C 是产量 q 的函数，而产量 q 又是时间 t 的函数。时间 t 通过产量 q 间接地影响到成本 C，那么成本 C 仍可以看作时间 t 的函数。C 与 t 的这种函数关系称为复合的函数关系。

定义 1-1-7 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 R_φ，若 R_φ 与 D_f 的交集不等于空集，则 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 可以复合成函数 $y=f[\varphi(x)]$，称 y 为 x 的**复合函数**。其中，x 是自变量，u 是**中间变量**。

注：

(1) 只有当 $R_\varphi \cap D_f \neq \varnothing$ 时，两个函数才可以构成一个复合函数。例如，$y=\sqrt{u}$ 与 $u=\sin x-2$ 就不能构成复合函数，因为 $u=\sin x-2$ 的值域 $u\in[-3,-1]$ 与 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $u\geqslant 0$ 的交集为空集。

(2) 复合函数还可以由两个以上的函数复合而成，即中间变量可以有多个。

(3) 复合函数通常不一定是由纯粹的基本初等函数复合而成，而更多是由基本初等函数经过四则运算形成的简单函数构成的，这样，复合函数的合成与分解往往是针对简单函数的。

例 1-1-13 分析下列复合函数的构成。

(1) $y=\arctan 3^{\sqrt{x}}$　　　(2) $y=\cos^3(2x^2-x+1)$

解 (1) $y=\arctan u, u=3^v, v=\sqrt{x}$

(2) $y=u^3, u=\cos v, v=2x^2-x+1$

例 1-1-14 设 $f(x)=x^2, g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$。

解 $f[g(x)]=f(e^x)=(e^x)^2=e^{2x}$

$g[f(x)]=g(x^2)=e^{x^2}$

注：$e^{2x}\neq e^{x^2}$，一般地，$f[g(x)]\neq g[f(x)]$，即复合运算不满足交换律。

1.1.5 初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数包括常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数。

1) 常数函数 $y=C$

常数函数 $y=C$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，无论 x 取何值，都有 $y=C$，所以它的图像是与 x 轴平行或重合的直线(图 1-1-15)。

2) 幂函数 $y=x^\mu$（μ 为实数）

幂函数中，当 μ 取不同值时，幂函数的定义域不同，须分 $\mu>0$ 和 $\mu<0$ 两种情况讨论。这里只讨论 $x\geqslant 0$ 的情形，$x<0$ 时的图像可根据函数的奇偶性来确定。

当 $\mu>0$ 时，函数的图像通过原点 $(0,0)$ 和 $(1,1)$ 点，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加且无界。

当 $\mu<0$ 时，函数的图像不过原点，但仍通过 $(1,1)$ 点，在 $(0,+\infty)$ 内单调减少且无界，

曲线以 x 轴和 y 轴为渐近线。

图 1-1-16 给出了几个常见幂函数$\left(参数 \mu 取 1,2,3,-1,\frac{1}{2}\right)$的图像，读者可以自行考虑参数 μ 取其他值的情形。

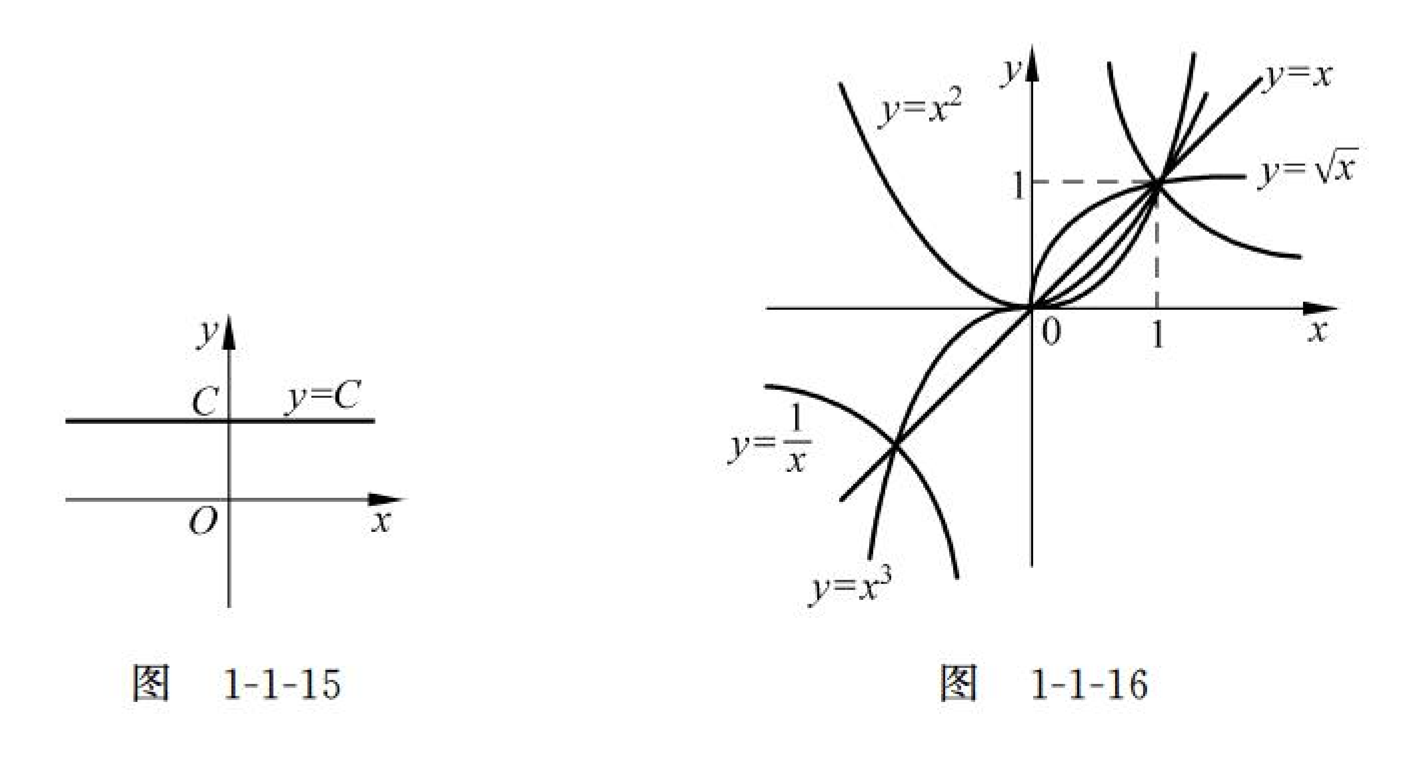


图　1-1-15　　　　图　1-1-16

3）指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$

指数函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$(0,+\infty)$，它的图像在 x 轴上方，且通过$(0,1)$点。

当 $a>1$ 时，函数单调递增且无界，x 轴的负半轴是曲线的渐近线；当 $0<a<1$ 时，函数单调递减且无界，x 轴的正半轴是它的渐近线(图 1-1-17)。

4）对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$

对数函数的定义域是$(0,+\infty)$，图像在 y 轴右方，值域是$(-\infty,+\infty)$，曲线通过$(1,0)$点。

当 $a>1$ 时，函数单调增加且无界，y 轴的负半轴是它的渐近线；当 $0<a<1$ 时，函数单调递减且无界，y 轴的正半轴是它的渐近线(图 1-1-18)。

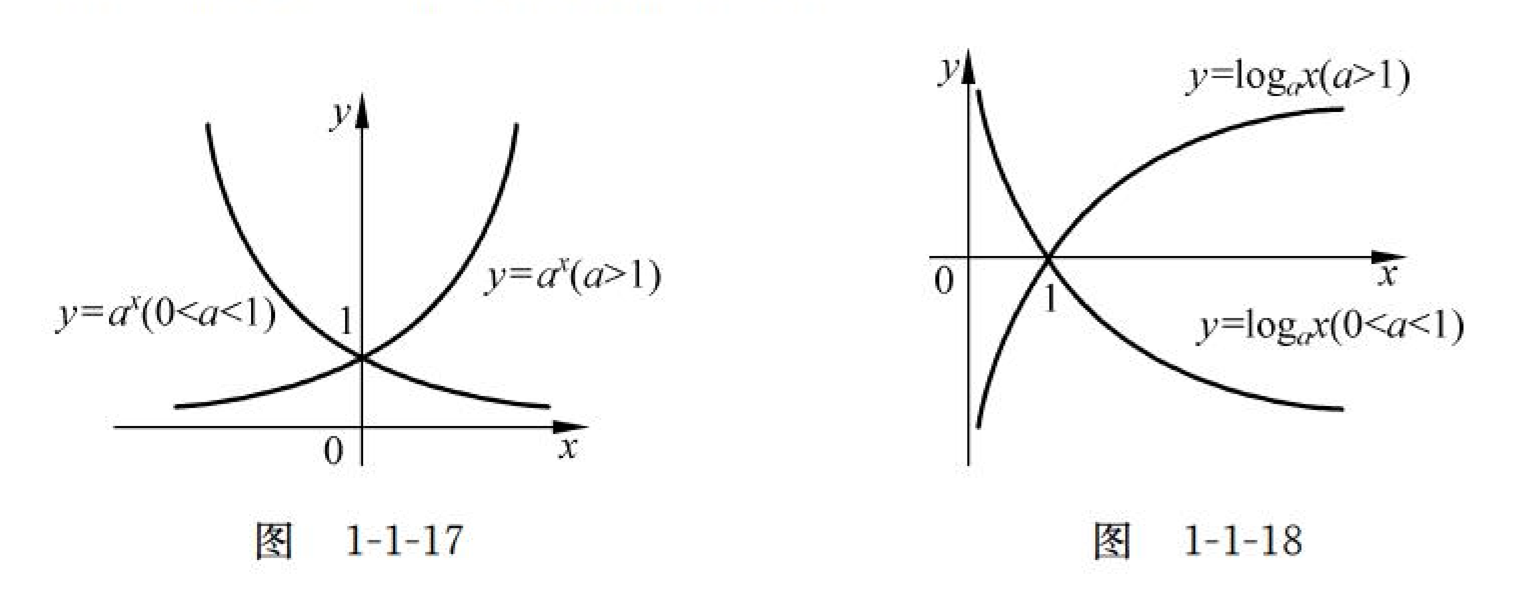


图　1-1-17　　　　图　1-1-18

指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数。

5）三角函数

三角函数包括 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$。$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的定义域均为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，以 2π 为周期，是有界函数。$y=\sin x$ 为奇函数，在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$单调递增；$y=\cos x$ 为偶函数，在$[0,\pi]$单调递减。图 1-1-19 所示为正弦函数和余弦函数的图像。

$y=\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$；它是奇函数，以 π 为周期，在每个周期内单调递增，以直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为渐近线（图 1-1-20）。

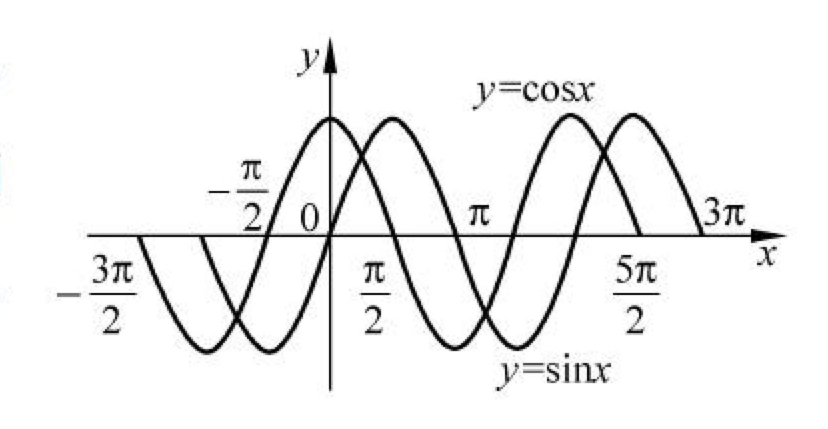


图 1-1-19

$y=\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$；它是奇函数，以 π 为周期，在每个周期内单调递减，以直线 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为渐近线（图 1-1-20）。

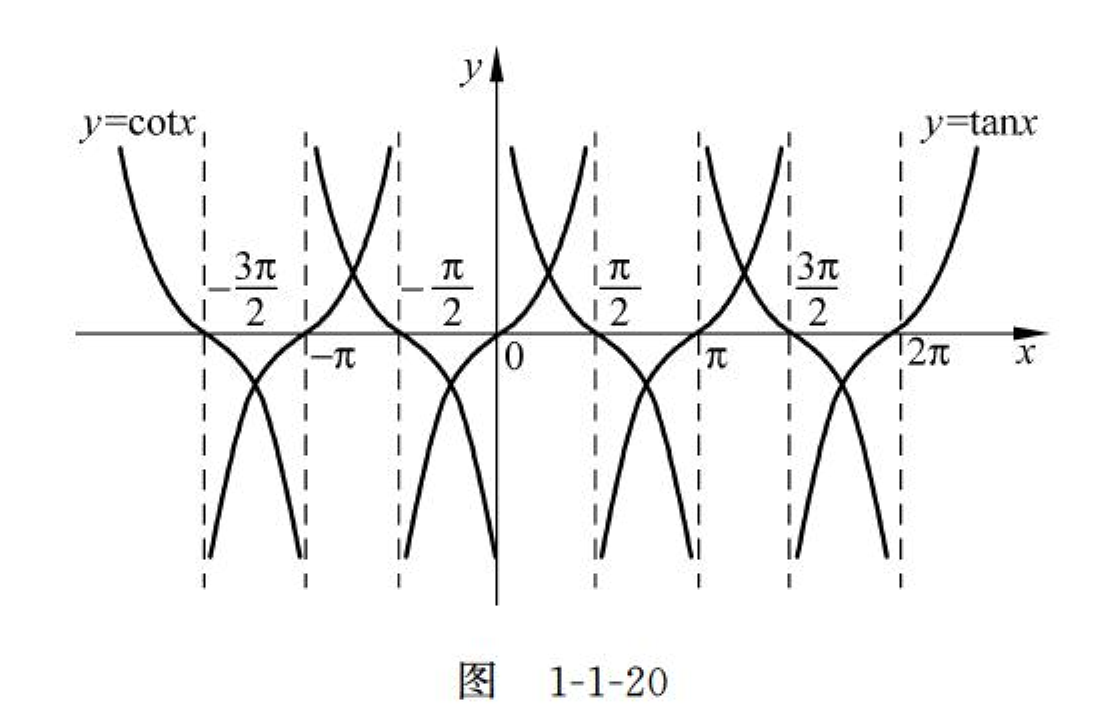


图 1-1-20

$y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，以 2π 为周期（图 1-1-21）。

$y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$ 的定义域为 $x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，以 2π 为周期（图 1-1-21）。

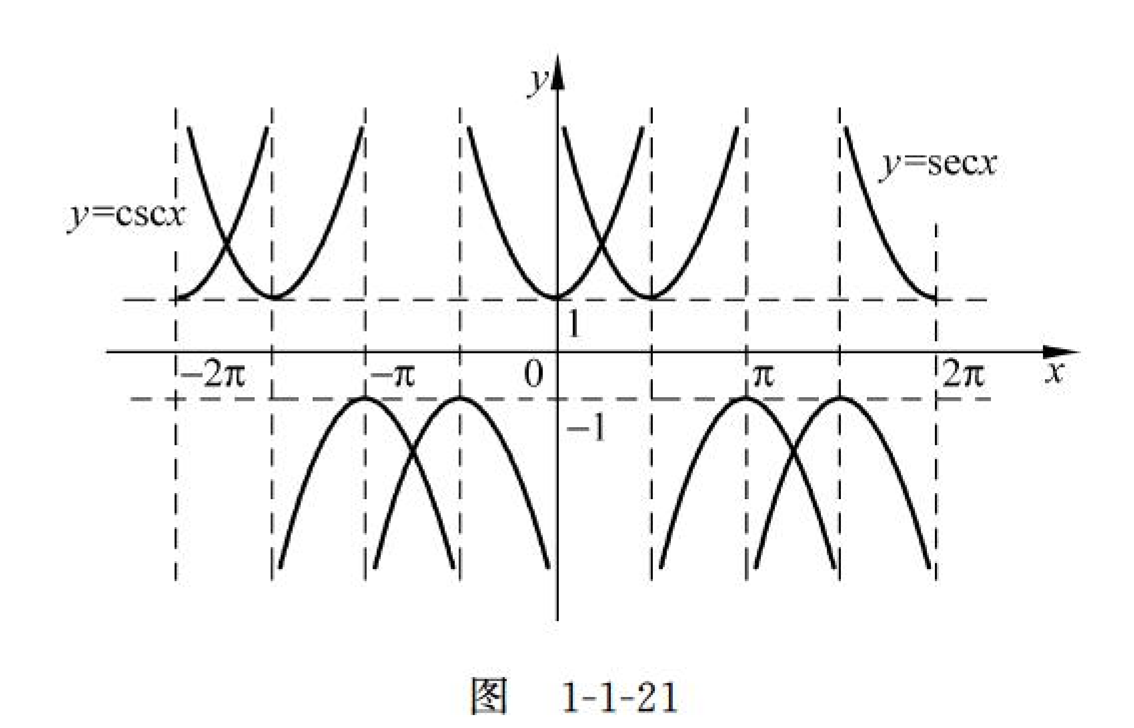


图 1-1-21

6）反三角函数

由于三角函数都是周期函数，对于值域中每个 y，都有无穷多个 x 与之对应，因此，必须限制其在某一单调区间上，才能建立反三角函数。我们把在这样单调区间上所建立起来的反三角函数，称为反三角函数的主值。反三角函数主要包括 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 等。

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，为单调递增的奇函

数(图 1-1-22)。

反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域是$[-1,1]$,值域是$[0,\pi]$,为单调递减的函数(图 1-1-22)。

反正切函数 $y=\arctan x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,为单调递增的奇函数,且有界(图 1-1-23)。

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$(0,\pi)$,为单调递减的有界函数(图 1-1-23)。

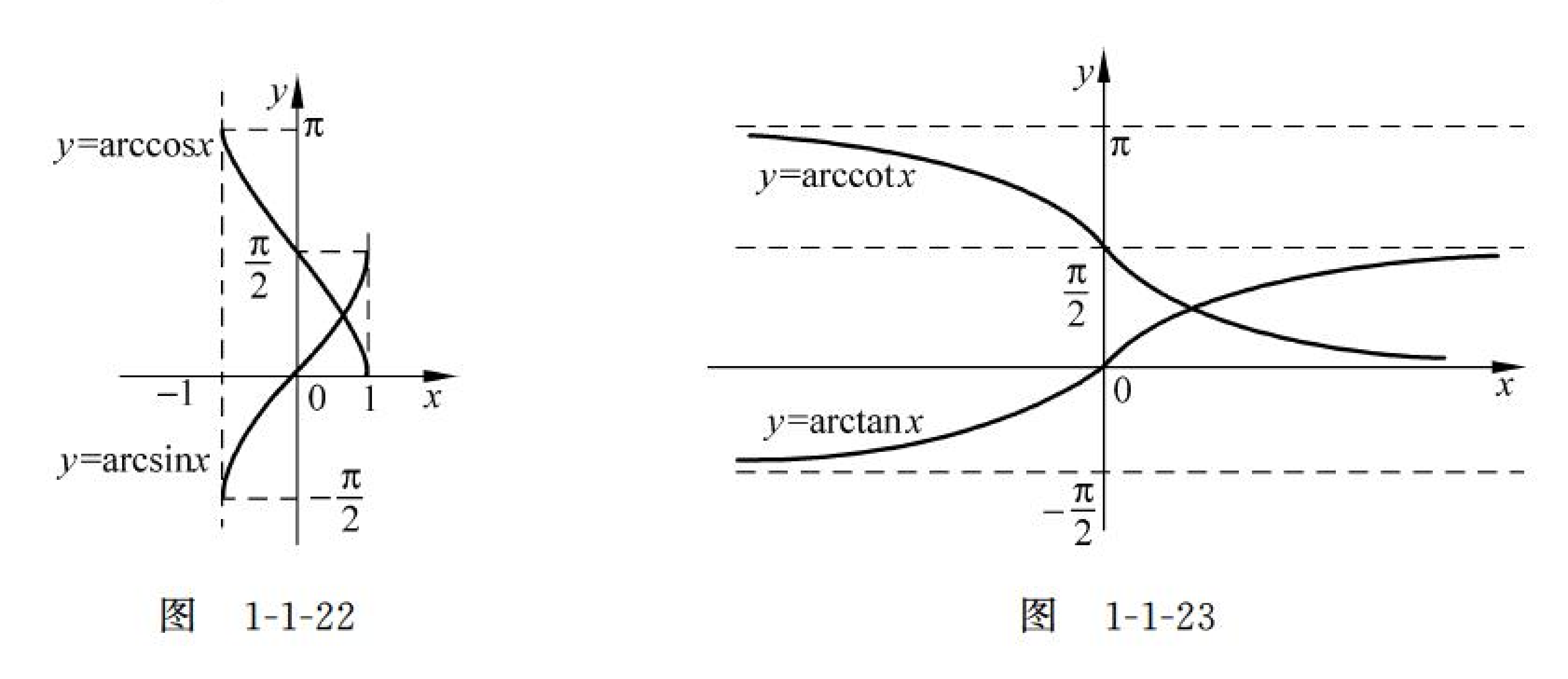


图 1-1-22　　　　图 1-1-23

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合运算,并且能用一个解析式表示的函数称为**初等函数**。

例如,$y=\sqrt{1+\ln(2+\sqrt{x})}$,$y=e^{2x+1}\sin(x^2+1)$,$y=\ln x+\arctan\sqrt{1+\cos x}$等都是初等函数。分段函数一般不是初等函数,但绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}=\sqrt{x^2}$ 却是初等函数。

习题 1-1

1. 选择题。

(1) 下列函数 $f(x)$和 $g(x)$是相同的函数的是(　　)。

A. $f(x)=\lg\sqrt{x+1}$,$g(x)=\frac{1}{2}\lg(x+1)$

B. $f(x)=\frac{x}{x(1+x)}$,$g(x)=\frac{1}{1+x}$

C. $f(x)=\cos x$,$g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$

D. $f(x)=1$,$g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$

(2) 下列函数在定义域内为无界函数的是(　　)。

A. $y=100^{100}$　　B. $y=2+\sin x$

C. $y=|\cos x|$　　D. $f(x)=x\sin x$

(3) 设函数 $f(x)=|x-3|$，则 $f[f(1)]=($　　$)$。

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

2. 设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$，$B=[-10,3)$，写出 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\backslash B$ 及 $A\backslash(A\backslash B)$ 的表达式。

3. 求下列函数的定义域。

(1) $y=\lg(x^2-4)$　　(2) $y=\dfrac{1}{x^2-2x}$

(3) $y=\sqrt{3x+2}$　　(4) $y=\dfrac{2}{x}-\sqrt{1-x^2}$

(5) $y=\tan(x+1)$　　(6) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$

(7) $y=\sqrt{\sin x}$　　(8) $y=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$

(9) $y=\dfrac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$　　(10) $y=\log_3(\log_2 x)$

4. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x| & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\ 0 & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$，求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$。

5. 讨论下列函数的奇偶性。

(1) $f(x)=2x^3-5\sin x$　　(2) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

(3) $f(x)=x(x+1)(x-1)$　　(4) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$

(5) $f(x)=a^x+a^{-x}(a>0)$　　(6) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$

(7) $f(x)=xe^x$　　(8) $f(x)=\sin|x|-\cos x+2$

6. 求下列函数的反函数。

(1) $y=x^3-1$　　(2) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

(3) $y=1+\ln(2x-3)$　　(4) $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$

7. 下列函数可以看成由哪些简单函数复合而成？

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$　　(2) $y=(1+\lg x)^5$

(3) $y=\cos^2(3x-2)$　　(4) $y=\lg(\arccos x^3)$

8. 已知 $f[\varphi(x)]=1+\cos x$，$\varphi(x)=\sin\dfrac{x}{2}$，求 $f(x)$。

9. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的，证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

1.2 极限的概念

在高等数学中，一个最基本的概念就是极限。我国古代数学家刘徽在公元 3 世纪就创造了“割圆术”的方法来计算圆周率：他从圆内接正六边形的面积算起，依次将边数加倍，一直算到圆内接正 3072 边形的面积，从而得出圆周率 π 的近似值 $\frac{3927}{1250}\approx 3.1416$。这是举世公认的运用极限思想处理数学问题的经典之作。

1.2.1 数列的极限

1. 数列的概念

按照一定顺序排列出的无穷个数

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

称为**数列**，简记为 $\{x_n\}$，其中 x_n 为数列 $\{x_n\}$ 的**通项**或**一般项**。由于一个数列 $\{x_n\}$ 完全由其一般项 x_n 所确定，故也把数列 $\{x_n\}$ 简称为数列 x_n。例如：

(1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$；

(2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$；

(3) $3, 9, 27, \cdots, 3^n, \cdots$；

(4) $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$；

(5) $0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{(-1)^n+1}{n}, \cdots$。

在几何上，数列可看作数轴上的一个动点，它依次取数轴上的点 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$（图 1-2-1）。

x_2 x_1 x_n x_3

图 1-2-1

数列 $\{x_n\}$ 可看作自变量为正整数 n 的函数

$$x_n = f(n) \quad (n \in \mathbf{N}^+)$$

当自变量 n 依次取 $1, 2, 3, \cdots$ 一切正整数时，对应的函数值就排成数列 $\{x_n\}$。

2. 数列的极限

当 n 无限增大时，数列(1)的一般项 $\frac{1}{2^n}$ 无限接近于 0；数列(2)的一般项 $\frac{n}{n+1}$ 无限接近于 1；数列(3)的一般项 3^n 无限增大，不接近于任何确定的常数；数列(4)的一般项 $(-1)^{n+1}$ 在 1 和 -1 之间跳动，不接近于任何确定的常数；数列(5)的一般项 $\frac{(-1)^n+1}{n}$ 虽然奇数项和偶数项变化方式不一样，但都无限接近于同一个数 0。

通过观察可以看出，数列的一般项 x_n 的变化趋势不是无限接近于某个确定的常数，就是不接近于任何确定的常数。

定义 1-2-1 对于数列$\{x_n\}$，如果当n无限变大时，x_n趋于一个确定的常数A，则称**当n趋于无穷大时，数列$\{x_n\}$以A为极限**，也称数列**$\{x_n\}$收敛于A**，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad 或 \quad x_n \to A(n\to\infty)$$

如果数列$\{x_n\}$没有极限，则称数列$\{x_n\}$**发散**。

数列(1)的一般项$\frac{1}{2^n}$无限接近于0，0是数列(1)的极限，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，也称数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$收敛于0；数列(2)的一般项$\frac{n}{n+1}$无限接近1，1是数列(2)的极限，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$，也称数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$收敛于1；数列(3)和数列(4)为发散数列；数列(5)的一般项$\frac{(-1)^n+1}{n}$无限接近0，0是数列(5)的极限，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$。

1.2.2 函数的极限

数列的极限只是一种特殊的函数(即**整标函数**)的极限。下面讨论定义于实数集合上的函数$y=f(x)$的极限。

1. $x\to\infty$时函数的极限

在数列极限中，如果记$x_n=f(n)$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$可写成$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$。如果用$x$替换$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$中的$n$，则得到$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，这个极限与数列极限在本质上是一样的：它们都是当自变量趋于无穷大时，函数趋于一个确定的值。因此我们可以仿照数列极限的定义，作出自变量$x\to\infty$时函数极限的定义。例如，对于函数$y=1+\frac{1}{x}$(图 1-2-2)，当$|x|$无限增大时，y无限接近1，和数列极限一样，称$|x|$趋于无穷大时，$y=1+\frac{1}{x}$以1为极限。

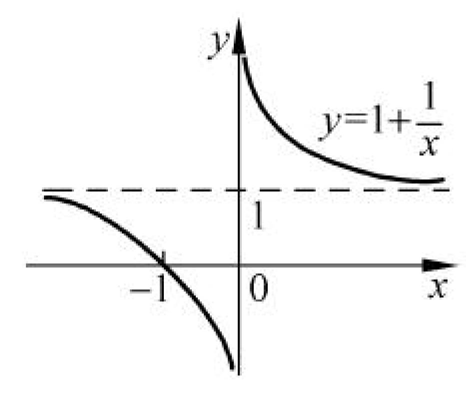


图 1-2-2

定义 1-2-2 如果当$|x|$无限增大时，函数$f(x)$无限地趋于一个确定的常数A，则称**当$x\to\infty$时函数$f(x)$以A为极限**。记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty)$$

如果从某一时刻起，x只能取正值或负值且趋于无穷，则有下面的定义。

定义 1-2-3 如果当$x>0$且无限增大时，函数$f(x)$无限地趋于一个确定的常数A，则称**当$x\to+\infty$时函数$f(x)$以A为极限**。记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to+\infty)$$

定义 1-2-4 如果当$x<0$且$|x|$无限增大时，函数$f(x)$无限地趋于一个确定的常数A，则称**当$x\to-\infty$时函数$f(x)$以A为极限**。记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to-\infty)$$

定理 1-2-1 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$。

例 1-2-1　讨论极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$。

解　当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{x^2}$ 趋于 0，函数值趋于 1，即

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1$$

当 $x\to-\infty$ 时函数值同样趋于 1，即

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1$$

所以有 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=1$。图 1-2-3 给出了函数 $1-\dfrac{1}{x^2}$ 的变化情况。

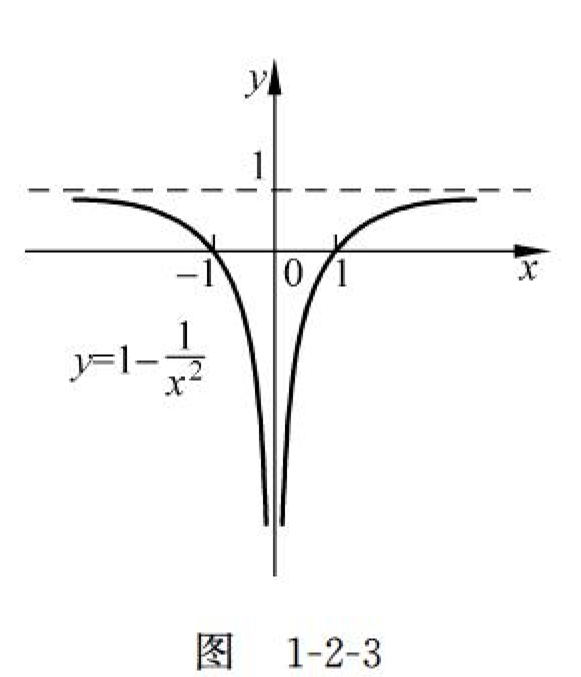
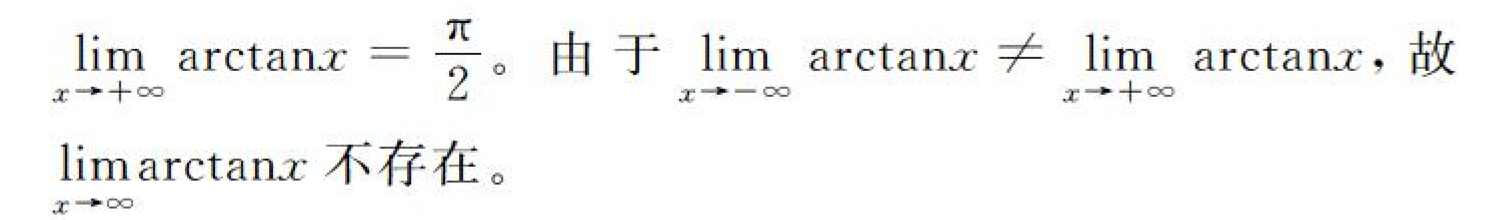


图　1-2-3



例 1-2-2　讨论极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$。

解　如图 1-1-23 所示，当 $x\to-\infty$ 时，$\arctan x$ 趋于 $-\dfrac{\pi}{2}$，



即 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$。当 $x\to+\infty$ 时，$\arctan x$ 趋于 $\dfrac{\pi}{2}$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$。由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在。

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

考察函数 $f(x)=2x+1$，当 x 分别从左边和右边趋于 $\dfrac{1}{2}$ 时的变化趋势（表 1-2-1）。

表　1-2-1

x	0	0.1	0.3	0.4	0.49	…	0.5	…	0.51	0.6	0.9	1
$f(x)$	1	1.2	1.6	1.8	1.98	…	2	…	2.02	2.2	2.8	3

由表 1-2-1 不难看出，当 x 无限接近 $\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 无限趋于常数 2。我们称 $x\to\dfrac{1}{2}$ 时函数 $f(x)$ 的极限为 2。

定义 1-2-5　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域（点 x_0 可以除外）内有定义，如果当 x 趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A，则称**当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 以 A 为极限**。记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\quad 或\quad f(x)\to A(x\to x_0)$$

根据定义可得结论：$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$。

3. 左极限和右极限

定义 1-2-6　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 右侧的某个邻域（点 x_0 可以除外）内有定义，如果当 $x>x_0$ 趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A，则称当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 的**右极限为**

A。记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to x_0^+) \quad 或 \quad f(x_0^+) = A$$

定义 1-2-7　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 左侧的某个邻域(点 x_0 可以除外)内有定义,如果当 $x<x_0$ 趋于 x_0 时,函数 $f(x)$趋于一个常数 A,则称当 x 趋于 x_0 时,$f(x)$的**左极限**为 A。记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to x_0^-) \quad 或 \quad f(x_0^-) = A$$

由定义 1-2-6 及定义 1-2-7 可得到定理 1-2-2。

定理 1-2-2　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=A$。

例 1-2-3　设 $f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x & x \geqslant 0 \end{cases}$,讨论当 $x \to 0$ 时,$f(x)$的极限是否存在。

解　因为 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^-} 0=0$,$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^+} x=0$,由定理 1-2-2 可知

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

图 1-2-4 给出了函数 $f(x)$的变化情况。

例 1-2-4　设 $f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$,讨论当 $x \to 0$ 时,$f(x)$的极限是否存在。

解　考虑到

$$\lim_{x \to 0^-} f(x)=\lim_{x \to 0^-} (x-1)=-1$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x)=\lim_{x \to 0^+} (x+1)=1$$

此时左、右极限存在但不相等,根据定理 1-2-2 知 $f(x)$在 $x=0$ 处的极限不存在。图 1-2-5 给出了函数 $f(x)$的变化情况。

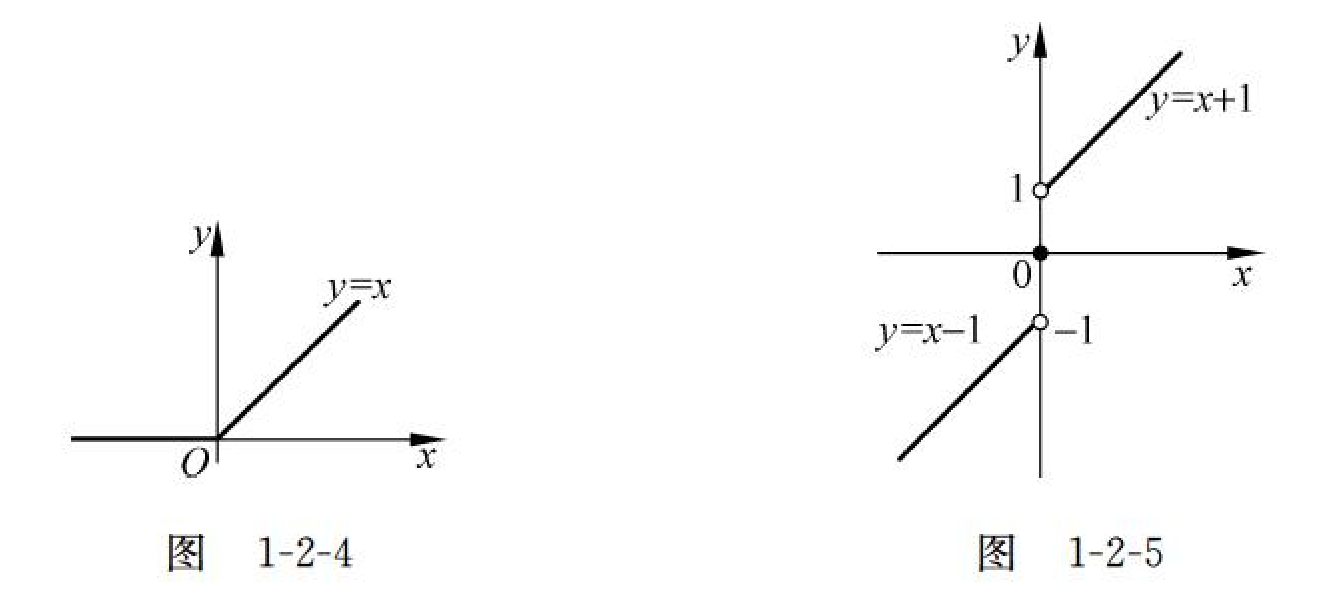


图　1-2-4　　　　图　1-2-5

1.2.3　关于极限概念的几点说明

为了正确理解极限的概念,有如下几点说明。

(1) 在一个变量前加上记号 lim,表示对这个变量进行取极限运算,若变量的极限存在,所指的不再是这个变量本身而是它的极限,即变量无限接近的那个值。

例如,设 A 表示圆面积,S_n 表示圆内接正 n 边形的面积,则当 n 比较大时,$S_n \approx A$,但 $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ 就不再是 S_n 了,而是 S_n 的极限——圆的面积 A,所以它的表达式 $A=\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ 就不

含任何近似成分，而是一种精确值了。

(2) 在极限过程 $x\to x_0$ 中考察 $f(x)$时，我们只要讨论 x 充分接近 x_0 时 $f(x)$的情况，与 $x=x_0$ 或 x 远离 x_0 时 $f(x)$的取值是毫无关系的，这一点在求分段函数的极限时尤为重要。

*(3) 如上所给出的各种情形下的极限的定义，均属于极限的形象描述，是一种定性分析。例如，所有极限定义中，皆要求自变量在某一变化过程中 $f(x)$无限接近确定的常数 A，那么何谓 $f(x)$与定常数 A 无限接近？如何在数学上予以精确的描述，采用定量分析呢？事实上，$f(x)$与定常数 A 无限接近是指$|f(x)-A|$可以任意小，即$|f(x)-A|$可以无限接近 0。换言之，对任意给定的正数 ε(不管它有多小)，当 x 变化到一定的程度时，总有$|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立。由于自变量 x 的变化过程有多种方式，如上所给出的各种情形下的极限都有精确的定义。这里仅以 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限给出精确的定义($\varepsilon-\delta$ 定义)，供学有余力的同学参考。

定义 1-2-5′ 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个邻域(点 x_0 可以除外)内有定义，若存在常数 A，对任意给定的正数 ε，存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称**当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$以 A 为极限**。记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0)$$

习题 1-2

1. 写出下列数列的前 5 项，并指出当 $n\to\infty$时其极限是否存在。

(1) $x_n=\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$　　(2) $x_n=(-1)^n\dfrac{n+1}{n}$

2. 观察下列数列当 $n\to\infty$时的变化趋势，判断它们是否有极限。有极限时指出其极限值。

(1) $x_n=\dfrac{1000}{n}$　　(2) $x_n=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3^n}$

(3) $x_n=\dfrac{3n+1}{2n-1}$　　(4) $x_n=1+(-1)^n$

(5) $x_n=\dfrac{6^n}{5^n}$　　(6) $x_n=\sqrt{n}+1$

3. 当 $n\to\infty$时，数列$\left\{\cos\dfrac{n\pi}{2}\right\}$是否有极限？为什么？

4. 选择题。

(1) 当 $x\to\infty$时，下列函数中有极限的是(　　)。

A. $\sin x$　　B. e^{-x}　　C. $\dfrac{x+1}{x^2-1}$　　D. $\operatorname{arccot}x$

(2) 下列函数中，当 $x\to0$ 时极限存在的是(　　)。

A. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & x\neq0\\ 1 & x=0\end{cases}$　　B. $f(x)=\begin{cases}\sin x+1 & x<0\\ \cos x+1 & x>0\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases} x^3-1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 3^x & x>0 \end{cases}$　　D. $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & x>0 \\ x+1 & x<0 \end{cases}$

5. 讨论下列函数极限是否存在。若存在，求其极限值；若不存在，说明理由。

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x}$

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<1 \\ 1 & x=1 \\ x-1 & x>1 \end{cases}$，求当 $x\to1$ 时 $f(x)$ 的左、右极限，并指出当 $x\to1$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在。

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & x\leqslant 0 \\ x^2+1 & 0<x\leqslant 1 \\ 2x^3 & x>1 \end{cases}$，求极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to1}f(x)$。

1.3 无穷小量与无穷大量

1.3.1 无穷小量

定义 1-3-1 若函数 $y=f(x)$ 在自变量 x 的某个变化过程中以零为极限，则称在该变化过程中，$f(x)$ 为**无穷小量**(简称**无穷小**)。通常用希腊字母 α,β,γ 来表示无穷小量。

例如，当 $x\to0$ 时，x^2，$\sqrt[3]{x}$，$\sin x$ 都是无穷小量；当 $x\to1$ 时，$(x-1)^3$，$\ln x$ 都是无穷小量；当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{1}{2^n}$ 都是无穷小量。

注：

(1) 无穷小量是一个以 0 为极限的变量，常量中除 0 外不管多小的数也不是无穷小量，即数 0 是唯一可以作为无穷小量的常数。

(2) 无穷小量与自变量的变化过程密切相关，不能笼统地说某个变量是无穷小量，必须指出它的极限过程。例如，当 $x\to0$ 时，x^2 是无穷小量；而当 $x\to1$ 时，x^2 不是无穷小量。

无穷小量具有如下性质。

性质 1-3-1 有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量。

性质 1-3-2 有界变量与无穷小量的乘积仍为无穷小量。

性质 1-3-3 常数与无穷小量的乘积仍是无穷小量。

性质 1-3-4 有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量。

注：两个无穷小量的商不一定是无穷小量。

例 1-3-1 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$。

解　当 $x\to\infty$ 时，$\sin x$ 的函数值在 -1 和 1 之间无限次地“振荡”，不趋于确定的常数，因此它无极限；但有 $|\sin x|\leqslant 1$，即 $\sin x$ 是个有界量；又 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，即当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 是无穷小量，故由性质 1-3-2 知 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$。

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $f(x)-A$ 无限接近零，即 $x\to x_0$ 时，$f(x)-A$ 为无穷小量。

无穷小量不仅在解决实际问题中具有很强的现实意义，而且在微积分的逻辑体系中具有重要的理论意义，以致到现在人们还常常把微积分理论称为“无穷小分析”。这是因为微积分的许多重要概念都以极限为基础，而极限又与无穷小量有着密切的联系，这种联系表现为定理 1-3-1。

定理 1-3-1（极限与无穷小量的关系）　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量。

将定理 1-3-1 中自变量的变化过程换成 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 等其他情况后定理仍然成立。

1.3.2　无穷大量

定义 1-3-2　在自变量 x 的某个变化过程中，若相应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称在该变化过程中，$f(x)$ 为**无穷大量**（简称**无穷大**），记作 $\lim f(x)=\infty$。

如果相应的函数值 $f(x)$（$-f(x)$）无限增大，则称在该变化过程中 $f(x)$ 为正（负）无穷大，记作 $\lim f(x)=+\infty(-\infty)$。例如，$\frac{1}{x-2}$ 是 $x\to 2^+$ 时的正无穷大量；$\ln x$ 是 $x\to 0^+$ 时的负无穷大量，即 $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$。

无穷大量是极限不存在的一种情形，这里虽借用极限的记号，但并不表示极限存在。

注：

(1) 无穷大量是变量，一个常数不论有多大（如 10^{100} 等）都不能作为无穷大量。

(2) 无穷大量与自变量的变化过程有关。例如，当 $x\to\infty$ 时，x^2 是无穷大量；而当 $x\to 0$ 时，x^2 却是无穷小量。

(3) 函数在变化过程中绝对值越来越大且可以无限增大，才能称为无穷大量，因此无穷大必无界；但反之不真，例如，$f(x)=x\cos x$ 当 $x\to\infty$ 时是无界的，但不是无穷大。

对比无穷小量，无穷大量具有如下性质。

性质 1-3-5　有限个无穷大量的乘积仍是无穷大量。

性质 1-3-6　不为零的常数与无穷大量的乘积仍是无穷大量。

性质 1-3-7　有界变量与无穷大量之和为无穷大量。

注：两个无穷大量的商不一定是无穷大，两个无穷大量的和或差也不一定是无穷大量。然而，两个正无穷大量之和仍为正无穷大量，两个负无穷大量之和仍为负无穷大量。

1.3.3　无穷小量与无穷大量的关系

定理 1-3-2（无穷小量与无穷大量的关系）　在自变量的同一变化过程中，无穷大量的

倒数是无穷小量，恒不为零的无穷小量的倒数为无穷大量。

例如，当 $x\to0$ 时，x 为无穷小量，$\frac{1}{x}$为无穷大量，即有$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$；当 $x\to\infty$时，x 为无穷大量，$\frac{1}{x}$为无穷小量，即有$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$。

1.3.4 无穷小量的阶

在自变量的同一变化过程中，两个无穷小量的和、差、积均为无穷小量；但两个无穷小量的商却不一定是无穷小量，这是由于两个无穷小量的商的极限有各种可能。例如，当 $x\to0$ 时，$x,2x,x^3$ 虽均为无穷小量，但①$\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x}=2$；②$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3}{x}=0$；③$\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x^3}=\infty$。究其原因是分子、分母的两个无穷小量趋近于零的“速度”可能不同。上面①的极限是有限数 2，说明分子和分母趋近于零的“速度”相仿；②的极限是零，说明分子趋于零的“速度”比分母快；③的极限是无穷大量，说明分子趋于零的“速度”比分母慢。

定义 1-3-3 设 α,β 是同一变化过程中的两个无穷小量。

（1）如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α **高阶的无穷小量**，记作 $\beta=o(\alpha)$，也称 α 是比 β **低阶的无穷小量**。

（2）如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq0$，则称 β 与 α 是**同阶无穷小量**。特别地，当 $c=1$，即 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$ 时，称 β 与 α 是**等价无穷小量**，记作 $\alpha\sim\beta$。

如上例中的 $x,2x,x^3$，当 $x\to0$ 时，x 与 $2x$ 是同阶无穷小量；x^3 是比 x 较高阶的无穷小量；$2x$ 是比 x^3 较低阶的无穷小量。

定理 1-3-3（等价无穷小量替换定理） 在同一变化过程中，如果 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$存在，则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$。

证明 由 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$得 $\lim\frac{\alpha'}{\alpha}=1,\lim\frac{\beta}{\beta'}=1$，于是

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\left(\frac{\beta}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}\right)=\lim\frac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\frac{\alpha'}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$$

证毕。

等价无穷小量替换定理表明：求两个无穷小量的商的极限时，分子、分母可分别用它们的等价无穷小量代替。我们将会发现在求极限的过程中，如果能适当使用等价无穷小量替换，将给计算带来极大的方便。

习题 1-3

1. 下列各式中，哪些是无穷小量？哪些是无穷大量？

(1) $x_n=(-1)^n\frac{2^n}{3^n}(n\to\infty)$　　(2) $y=\frac{1}{\sin x}(x\to 0)$

(3) $y=2^{\frac{1}{x}}(x\to 0^-)$　　(4) $y=\frac{x}{x-3}(x\to 3)$

(5) $y=3^{-x}(x\to-\infty)$　　(6) $y=1-\cos x(x\to 0)$

2. 下列函数在自变量怎样的变化过程中是无穷小量？在自变量怎样的变化过程中是无穷大量？

(1) $y=2x^4$　　(2) $y=10^x$　　(3) $y=\ln x$　　(4) $y=\frac{x}{x-2}$

3. 利用无穷小量的性质求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2\sin x)$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x^3}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cos\frac{1}{x-1}$

4. 当 $x\to 2$ 时，x^2-4x+4 与 $x-2$ 相比，哪一个是高阶无穷小量？

5. 当 $x\to 1$ 时，无穷小量 $1-x$ 和 $1-x^3$ 是否同阶？是否等价？$1-x$ 和$\frac{1}{2}(1-x^2)$相比又如何？

1.4　极限的性质与运算法则

1.4.1　极限的性质

以下性质只对 $x\to x_0$ 时的情形加以叙述，其他形式的极限也有类似的结果。

性质 1-4-1(唯一性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$，则 $A=B$。

性质 1-4-2(有界性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界。

性质 1-4-3(保号性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 且 $A>0$(或 $A<0$)，则在 x_0 的某去心邻域内恒有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)。

推论 1-4-1　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 且在 x_0 的某去心邻域内恒有 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)，则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$)。

1.4.2　极限的四则运算法则

定理 1-4-1　在自变量的同一变化过程中，设 $\lim f(x)$ 及 $\lim g(x)$都存在，则有下列运算法则：

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$

(3) $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq 0)$

这里只证明法则(2)，其他法则证法类似。

证明 设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，由极限与无穷小的关系知

$$f(x)=A+\alpha, g(x)=B+\beta \quad (\alpha \text{ 和 } \beta \text{ 都是无穷小量})$$

于是

$$f(x)\cdot g(x)=(A+\alpha)\cdot(B+\beta)=AB+(A\alpha+B\beta+\alpha\beta)$$

由无穷小量的性质知 $A\alpha+B\beta+\alpha\beta$ 仍为无穷小量，再由极限与无穷小的关系可得

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=AB=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$$

证毕。

上述的运算法则不难推广到有限多个函数的代数和及乘积的情况。

推论 1-4-2 设 $\lim f(x)$ 存在，C 为常数，n 为正整数，则有

(1) $\lim[C\cdot f(x)]=C\cdot\lim f(x)$

(2) $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$

注：在使用这些法则时要求每个参与极限运算的函数的极限必须存在，并且作为分母的函数的极限不能为零。

例 1-4-1 求 $\lim\limits_{x\to-1}(2x^3-5x+1)$。

解 $\lim\limits_{x\to-1}(2x^3-5x+1)=2\lim\limits_{x\to-1}x^3-5\lim\limits_{x\to-1}x+\lim\limits_{x\to-1}1=2(\lim\limits_{x\to-1}x)^3-5\cdot(-1)+1$

$=2\cdot(-1)^3+6=4$

例 1-4-2 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-7x-10}{2x^3-5}$。

解 因为分母的极限 $\lim\limits_{x\to0}(2x^3-5)=-5\neq0$，所以由商的极限的运算法则可得

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-7x-10}{2x^3-5}=\frac{\lim\limits_{x\to0}(x^2-7x-10)}{\lim\limits_{x\to0}(2x^3-5)}=\frac{-10}{-5}=2$$

例 1-4-3 求 $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-25}$。

解 因为分母的极限 $\lim\limits_{x\to5}(x^2-25)=0$，故不能直接使用商的极限的运算法则，此时分式函数的极限将取决于分子的极限。在这里分子的极限 $\lim\limits_{x\to5}(x^2-4x-5)=0$，分子和分母有公因子 $(x-5)$，而 $x\to5$ 时，$x\neq5$，故可以约分，即

$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-4x-5}{x^2-25}=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)\cdot(x+1)}{(x-5)\cdot(x+5)}=\lim_{x\to5}\frac{x+1}{x+5}=\frac{3}{5}$$

例 1-4-4 求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+1}{x^2-2x}$。

解 因为分母的极限 $\lim\limits_{x\to2}(x^2-2x)=0$，故不能直接使用商的极限的运算法则，但分子的极限 $\lim\limits_{x\to2}(x^3+1)=9\neq0$。此时可以考虑原函数倒数的极限 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{x^3+1}=0$，即当 $x\to2$ 时 $\dfrac{x^2-2x}{x^3+1}$ 是无穷小量，由无穷小量与无穷大量的倒数关系知

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3+1}{x^2-2x}=\infty$$

对于 $x\to\infty$ 时函数的极限，可用分子、分母同除以它们的最高次幂，然后再求极限。

例 1-4-5　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x^2+5x-1}{4x^3+x^2+2}$。

解　这里分子、分母的极限都不存在，不能直接应用极限的运算法则，若把分子、分母同时除以最高次幂 x^3，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-x^2+5x-1}{4x^3+x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)}=\frac{3}{4}$$

例 1-4-6　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+2}{3x^3-2x^2+1}$。

解　将分子、分母同时除以最高次幂 x^3，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+2}{3x^3-2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}{3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}}=\frac{0}{3}=0$$

例 1-4-7　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+1}{2x^2+3x+2}$。

解　由例 1-4-6 及无穷小量与无穷大量的倒数关系可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+1}{2x^2+3x+2}=\infty$$

一般地，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0 & n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\ \infty & n>m\end{cases}$$

例 1-4-8　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$的极限。

解　当 $x\to 0$ 时，分子分母的极限均为 0，不能直接用极限运算法则，但可以先有理化，再求极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)}{x(\sqrt{4+x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}=\frac{1}{4}$$

例 1-4-9　已知 $f(x)=\begin{cases}-x+2 & x<0\\ x^3+2 & 0\leqslant x<1\\ 2-x & x\geqslant 1\end{cases}$，求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$。

解　由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x+2)=2$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^3+2)=2$

故

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=2$$

于是

$$\lim_{x\to 0}f(x)=2$$

又因为

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^3+2)=3$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2-x)=1$$

所以
$$\lim_{x\to1^-}f(x)\neq\lim_{x\to1^+}f(x)$$
因此，$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在。

习题 1-4

1. 计算下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3}{x-1}$　　(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+2}$

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^3-3x^2+x}{2x^2+3x}$

(5) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$　　(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)$　　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-3x^2+x+2}{4x^3+5x-3}$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+100}{2x^4-5x-7}$　　(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$　　(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$　　(14) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

(15) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$　　(16) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+5x-6}$

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}3x+a & x\leqslant0\\ x^2+1 & 0<x\leqslant1\\ \dfrac{b}{x} & x>1\end{cases}$，若$\lim\limits_{x\to0}f(x)$和$\lim\limits_{x\to1}f(x)$存在，求 a,b 的值和这两个极限值。

3. 设 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}$存在且为常数 b，求常数 a 与 b 的值。

1.5　极限存在的两个准则及两个重要极限

本节介绍两个特殊而重要的极限，我们要利用它们解决很多极限的计算。为了得出两个重要极限公式，先给出两个判定极限存在的准则。

1.5.1　极限存在的两个准则

准则 1-5-1（夹逼准则）　在自变量的同一变化过程中，如果函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$满足：$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim g(x)=\lim h(x)=A$，则 $\lim f(x)=A$。

准则 1-5-2　如果数列$\{x_n\}$是单调有界的，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 一定存在。

1.5.2　两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

证明　因为$\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{-\sin x}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}$，即改变 x 的符号时，$\dfrac{\sin x}{x}$的值不变，所以只须讨论 $x>0$ 时的情形即可。

作单位圆(图 1-5-1)，取圆心角$\angle AOB=x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，点 A 处的切线与OB 的延长线交于D，又 $BC\perp OA$，则

$$AD=\tan x,\quad BC=\sin x,\quad \overset{\frown}{AB}=x$$

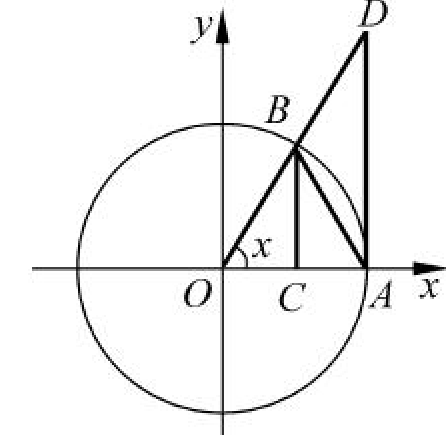


图　1-5-1

且有$S_{\triangle OAB}<S_{\text{扇形}OAB}<S_{\triangle OAD}$，所以$\dfrac{1}{2}\sin x<\dfrac{1}{2}x<\dfrac{1}{2}\tan x$，即 $\sin x<x<\tan x$，同除以 $\sin x$，得

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

三项都为正数，取它们的倒数，得

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

又因为$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1=\lim\limits_{x\to 0}1$，由准则 1-5-1 知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

证毕。

注：这个重要极限是$\dfrac{0}{0}$型，为了强调其形式，我们把它形象地写作

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1\qquad(\text{方框}\ \square\ \text{代表同一变量})$$

例 1-5-1　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$。

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

例 1-5-2　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$。

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

例 1-5-3　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$。

解　令 $t=\arcsin x$，则 $x=\sin t$，当 $x\to 0$ 时，有 $t\to 0$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$$

同理可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$$

例 1-5-4 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$。

解 由重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$及例 1-5-1 结论可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3x}{5x}\cdot\frac{5x}{\tan 5x}\right)=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\tan 5x}=\frac{3}{5}$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

这个极限可以利用准则 1-5-2 来证明，这里不作理论讨论，只列出$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$的数值表(表 1-5-1)，以观察其变化趋势。

表 1-5-1

x	1	2	3	4	5	10	100	1000	10000	…
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2	2.250	2.370	2.441	2.488	2.594	2.705	2.717	2.718	…

当$x\to\infty$时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$的极限存在，并且是一个无理数 e，即

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

这里

$$\mathrm{e}=2.718281828459045\cdots$$

指数函数$y=\mathrm{e}^x$及对数函数$y=\ln x$中的底 e 就是这个常数。如果令$\frac{1}{x}=t$，则当$x\to\infty$时，$t\to 0$，公式还可以写作

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$$

注：这个重要极限是1^∞型，为了强调其形式，我们把它形象地写作

$$\lim_{\triangle\to\infty}\left(1+\frac{1}{\triangle}\right)^{\triangle}=\mathrm{e}\quad 或\quad \lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$$

其中，三角形(△)或方框(□)代表同一变量。

例 1-5-5 求下列函数的极限。

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x+3}$　　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x$

解　(1) 令$\frac{x}{3}=u$,则 $x=3u$,当 $x\to\infty$时,$u\to\infty$,于是

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{3u}=\left[\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{3}=\mathrm{e}^{3}$$

(2) 令$-x=u$,则 $x=-u$,当 $x\to\infty$时,$u\to\infty$,于是

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x+3}=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{-2u+3}=\left[\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{-2}\cdot\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{3}$$

$$=\mathrm{e}^{-2}\cdot1^{3}=\mathrm{e}^{-2}$$

一般地,我们可以得出下面的结论:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+c}=\mathrm{e}^{ab}\qquad(1\text{-}5\text{-}1)$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right)^{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}}=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}^{3}}=\mathrm{e}^{-4}$

例 1-5-6　求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$。

解
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\mathrm{e}=1$$

例 1-5-7　求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}$。

解　令 $t=\mathrm{e}^{x}-1$,则 $x=\ln(t+1)$,当 $x\to0$ 时,有 $t\to0$,于是

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1$$

对照 1.3 节等价无穷小量的概念,当 $x\to0$ 时,可得下列常用等价无穷小量:

$$\sin x\sim x\quad \tan x\sim x\quad 1-\cos x\sim\frac{x^{2}}{2}$$

$$\arcsin x\sim x\quad \arctan x\sim x\quad \ln(1+x)\sim x\quad \mathrm{e}^{x}-1\sim x$$

利用等价无穷小量替换定理,例 1-5-4 还可以更简单做出来。因为当 $x\to0$ 时,$\sin 3x\sim3x$,$\tan5x\sim5x$,所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{\tan5x}=\lim_{x\to0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$$

注:只有当分子或分母为函数的乘积时,各个乘积因子式才可以分别用它们的等价无穷小量代换。对于和或差中的函数,一般不能分别用等价无穷小量代换。例如,

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^{3}x}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^{3}}=0$$

是不正确的。正确做法如下。

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^{3}x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^{3}}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{x^{2}}{2}}{x^{3}}=\frac{1}{2}$$

*__例 1-5-8__　求$\lim\limits_{x\to0}\frac{(x-x\cos x)\arctan x}{(\tan x-\sin x)\ln(1+x)}$。

解 因为当 $x\to 0$ 时，有 $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-x\cos x)\arctan x}{(\tan x-\sin x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(1-\cos x)\cdot x}{\frac{1}{2}x^3\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2\cdot x}{\frac{1}{2}x^3\cdot x}=1$$

注：极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 之所以重要，是因为自然界和社会中的许多现象和事物，如植物的生长、放射性物质的衰变、细菌的繁殖、热的辐射、复利的计算等大量实际问题都可以归结为这种形式的极限。作为第二重要极限的应用，下面介绍复利计息公式。所谓**复利计息**，就是将第一期的利息与本金之和作为第二期的本金，然后反复计息。设本金为 A_0，年利率为 r，一年后的本利和为

$$A_1=A_0+A_0r=A_0(1+r)$$

把 A_1 作为本金存入，第 2 年年末的本利和为

$$A_2=A_1+A_1r=A_1(1+r)=A_0(1+r)^2$$

照此计算，得到 t 年后的本利和为

$$A_t=A_0(1+r)^t \tag{1-5-2}$$

若把一年均分为 n 期结算，年利率仍为 r，于是每期利率为 $\frac{r}{n}$，得 t 年后的本利和为

$$A_t=A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \tag{1-5-3}$$

若采取瞬时结算法，即随时生息随时结算，也就是当 $n\to\infty$ 时，得 t 年后的本利和为

$$A_t=\lim_{n\to\infty}A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=A_0\mathrm{e}^{rt} \tag{1-5-4}$$

习题 1-5

1. 计算下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2$　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}3^n\sin\frac{x}{3^n}$（$x$ 为不等于 0 的常数）

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$　　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{2x}}$　　(10) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{6x+5}$　　(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x$

2. 利用等价无穷小的性质，求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}(n,m\in\mathbf{N}^+)$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\tan 3x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 3x}{\ln(1-2x)}$　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x\tan x)}{e^{x^2}-1}$

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2+x-2}$　　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}n[\ln(n+1)-\ln n]$

1.6　函数的连续性

1.6.1　函数连续性的概念

自然界中有许多现象，如气温的变化、河水的流动、动植物的生长等，都在连续地变化着。这些现象反映在数学上就是函数的连续性，它是与函数极限密切相关的另一个基本概念，也是微积分研究的主要对象。下面介绍函数连续性的概念，为此先引入一个常用的概念和记号。

设变量 u 从一个初值 u_1 变化到终值 u_2，终值与初值之差 u_2-u_1，称为变量 u 的**增量**或**改变量**，记作 Δu，即 $\Delta u=u_2-u_1$。

注：Δu 可正、可负、可为零，它是一个完整的符号，不能将其看作 Δ 与变量 u 的乘积。

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域上有定义，当自变量 x 由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数 y 相应地由 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，因此函数相应的增量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。

从直观上说，如果一个函数是连续变化的，它的图形应是一条不间断的曲线（图 1-6-1）。如果函数是不连续的，那就是曲线的图形在某处断开了（图 1-6-2）。

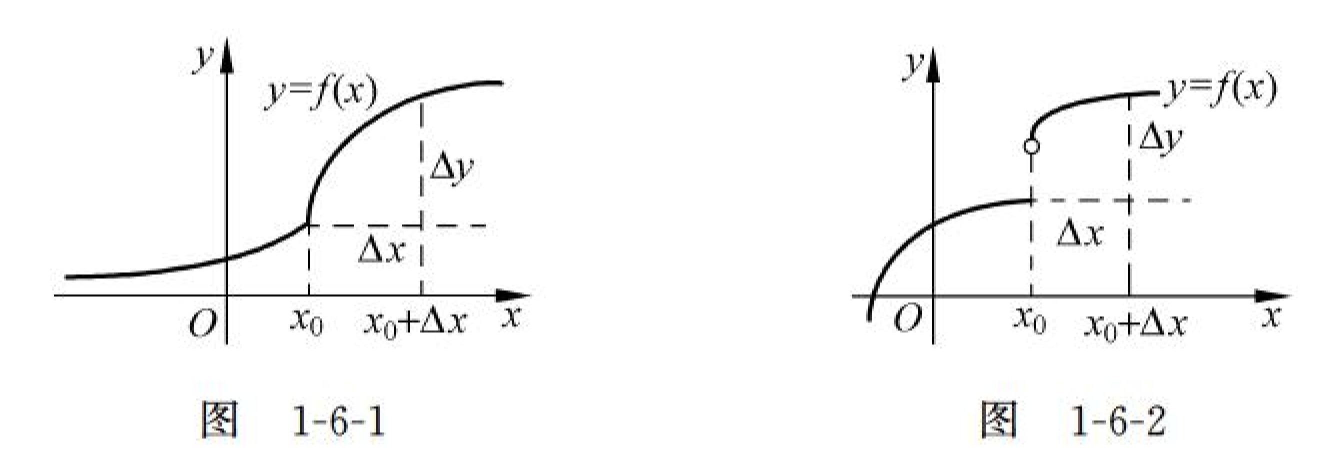


图　1-6-1　　　图　1-6-2

对比两个图像发现：图 1-6-1 中函数的图像是一条连续的曲线，它在点 x_0 处连续。当自变量 x 在点 x_0 处取得极其微小的改变量 Δx 时，函数的相应改变量 Δy 也极其微小，且当 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 也趋于 0。而对于图 1-6-2 中的函数，当自变量在点 x_0 处取得微小改变量 $\Delta x(\Delta x>0)$ 时，对应的函数值发生了显著的变化。显然，当 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 不可能趋近于零。

定义 1-6-1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果自变量的增量 Δx 趋于零时，对应的函数增量 Δy 也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0\quad 或\quad \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0 \tag{1-6-1}$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续。

例 1-6-1 用定义 1-6-1 证明 $y=3x^2+1$ 在点 x_0 处连续。

证明 当自变量 x 在 x_0 处取得改变量 Δx 时，

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = [3(x_0+\Delta x)^2+1]-(3x_0^2+1)$$
$$= 6x_0\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}(6x_0\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2)=0$$

则由定义 1-6-1 可知，$y=3x^2+1$ 在点 x_0 处连续。证毕。

在定义 1-6-1 中，令 $x=x_0+\Delta x$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$x\to x_0$，于是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 可改为 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。于是有定义 1-6-1′。

定义 1-6-1′ 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \tag{1-6-2}$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续。

由定义 1-6-1′可看出，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须同时满足以下三个条件：

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。

从条件(3)知，若函数连续，则极限符号与函数符号可以相互交换，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f(\lim_{x\to x_0}x) \tag{1-6-3}$$

与左、右极限的概念对应，有左连续和右连续的概念：若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**左连续**；若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**右连续**。

定理 1-6-1 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是，函数 $f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续。

定义 1-6-2 如果函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内每一点都连续，则称**函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续**；若函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续，并且在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续，则称**函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续**，也称 **$f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数**。

1.6.2 初等函数的连续性

定理 1-6-2 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 均在点 x_0 处连续。

只证明和与差的情况，类似地可以证明积与商的情况。

证明 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$，于是有

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)\pm g(x_0)$$

因此，$f(x)\pm g(x)$在 x_0 处连续。证毕。

定理 1-6-2 可以推广到有限多个函数的和、差、积和商的情形。

定理 1-6-3　设函数 $u=\varphi(x)$在点 x_0 处连续，$y=f(u)$在点 $u_0=\varphi(x_0)$处连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点 x_0 处连续。

可以证明，**基本初等函数在其定义域内都是连续的**。根据定理 1-6-2 和定理 1-6-3 可得，**初等函数在定义区间内都是连续的**。因此，要求初等函数在其定义区间内某点的极限，只需求初等函数在该点的函数值即可。至于分段函数的连续性，除按上述结论考虑每一段函数的连续性外，还必须讨论分界点处的连续性。

例 1-6-2　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{8-x^2}$　　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)$

解　(1) 因为 $\sqrt{8-x^2}$ 是初等函数，定义域为$[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$，而 $2\in[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$，所以

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{8-x^2}=\sqrt{8-2^2}=2$$

(2) 因为 $\ln(\sin x)$在 $x=\dfrac{\pi}{2}$处连续，所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)=\ln\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)=\ln 1=0$$

1.6.3　函数的间断点

定义 1-6-3　如果函数 $y=f(x)$在点 x_0 处不连续，则称 x_0 是 $f(x)$的**间断点**。

由函数在某点连续的定义可知，如果 $f(x)$在 x_0 处有下列情况之一，则点 x_0 是函数 $f(x)$的一个间断点：

(1) 函数 $f(x)$在 x_0 处没有定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；

(3) 虽然$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$。

下面举例说明函数间断点的几种常见类型。

例 1-6-3　函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$在 $x=1$ 处没有定义，则 $x=1$ 是函数的间断点。又因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

所以，若补充函数在 $x=1$ 处的定义，令 $f(1)=2$，则该函数在 $x=1$ 处连续。所以 $x=1$ 称为**可去间断点**(图 1-6-3)。

例 1-6-4　函数$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，这里$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，但 $f(0)=1$，所以

$$\lim_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$$

因此 $x=0$ 是函数的间断点。但如果改变函数在 $x=0$ 处的值，令 $f(0)=0$，则所给函数在 $x=0$ 处连续。这种情况下 $x=0$ 也称为**可去间断点**(图 1-6-4)。

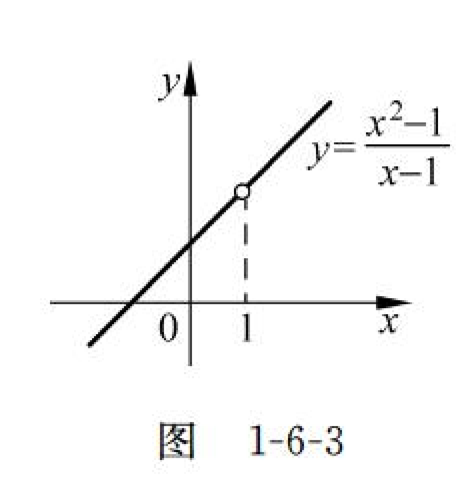


图　1-6-3

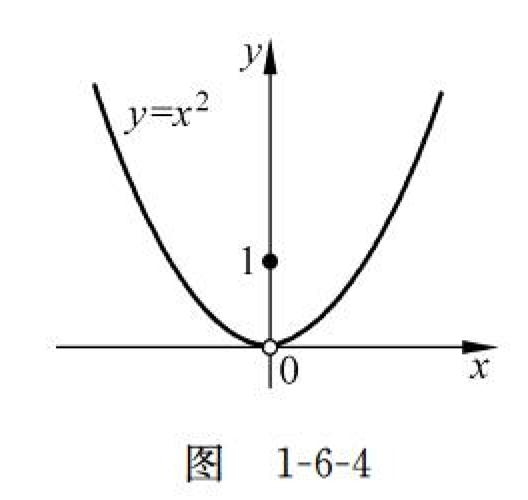


图　1-6-4

一般地，可去间断点具有这样的特征：**函数在该点左、右极限都存在且相等，但函数在该点没有定义，或虽有定义但极限值与函数值不相等。**

例 1-6-5　设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leqslant 0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x^2=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$，其左、右极限虽都存在，但不相等，故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，所以 $x=0$ 为间断点。因函数图形在 $x=0$ 处产生“跳跃”现象，故称这个间断点为**跳跃间断点**(图 1-6-5)。

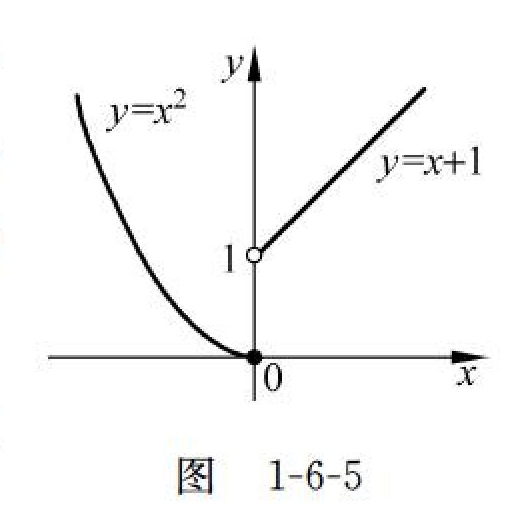


图　1-6-5

例 1-6-6　正切函数 $y=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处没有定义，则 $x=\frac{\pi}{2}$ 是函数的间断点。又因为

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x = \infty$$

所以这个间断点称为**无穷间断点**。图 1-1-20 给出了函数 $y=\tan x$ 的变化情况。

例 1-6-7　函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处没有定义，则 $x=0$ 是函数的间断点。又因为当 $x\to 0$ 时，函数值在 -1 与 1 之间变动无限次，所以称 $x=0$ 为**振荡间断点**(图 1-6-6)。

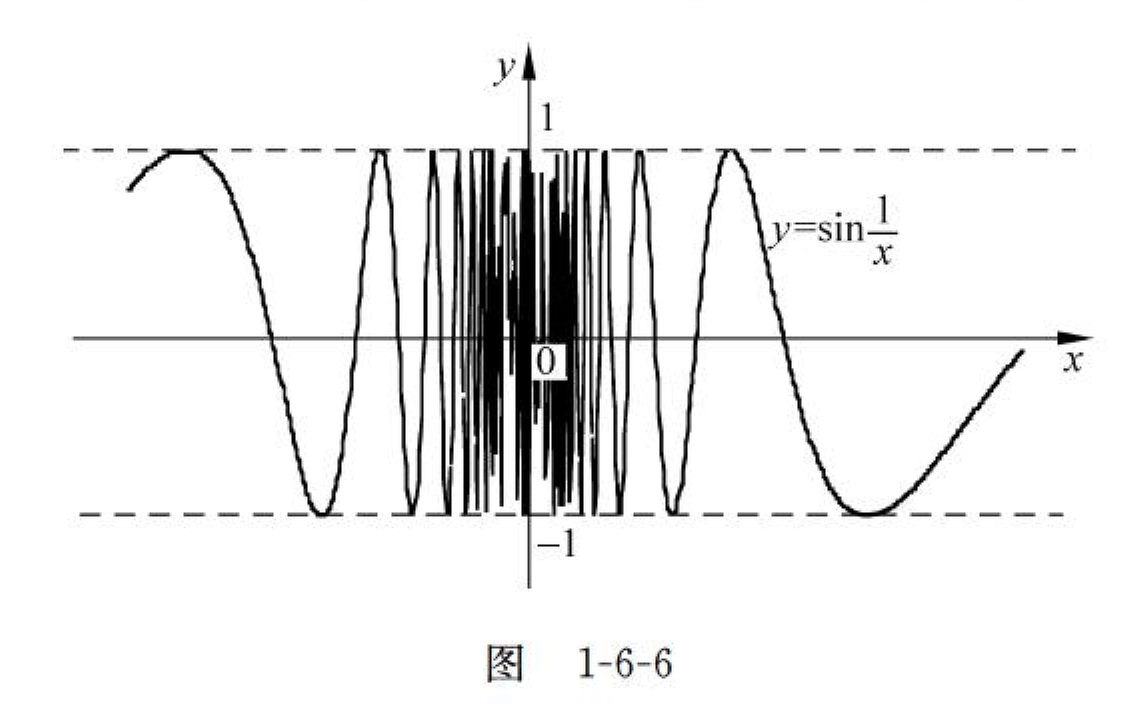


图　1-6-6

以上例子给出了间断点的一些常见类型。通常把间断点分为两类：设 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个间断点，如果当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 左、右极限都存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**第一类间断点**；否则，若 $f(x)$ 左、右极限至少有一个不存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**第二类间断点**。对于第一类间断点，当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在但不相等时，称 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断

点；当 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但不等于 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值时，称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点。显然，无穷间断点和振荡间断点都是第二类间断点。

1.6.4　闭区间上连续函数的性质

本小节先说明最大值与最小值的概念。对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$，如果有 $x_0\in I$，使得对于任一 $x\in I$ 都有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad 或\quad f(x)\geqslant f(x_0)$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大值**(或**最小值**)。

例如，函数 $f(x)=1+\sin x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上有最大值 2 和最小值 0。又如，函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有最大值 1 和最小值 -1。在开区间 $(0,+\infty)$ 内，$\operatorname{sgn}x$ 的最大值和最小值都是 1。但函数 $f(x)=x$ 在开区间 (a,b) 内既无最大值又无最小值。

定理 1-6-4(最值定理)　如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有最大值和最小值。

这就是说，如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi_1,\xi_2\in[a,b]$，使 $f(\xi_1)$ 和 $f(\xi_2)$ 分别为函数的最小值和最大值(图 1-6-7)。

注：如果函数 $f(x)$ 不在闭区间上连续，而在开区间内连续，或函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有间断点，则定理 1-6-4 的结论也不一定成立。例如，函数 $y=x$ 在开区间 $(0,1)$ 内连续，但在 $(0,1)$ 内没有最值。又如函数

$$f(x)=\begin{cases}-x-1 & -1\leqslant x<0\\ 0 & x=0\\ -x+1 & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

在 $[-1,1]$ 上有间断点 $x=0$，在闭区间 $[-1,1]$ 上没有最值(图 1-6-8)。

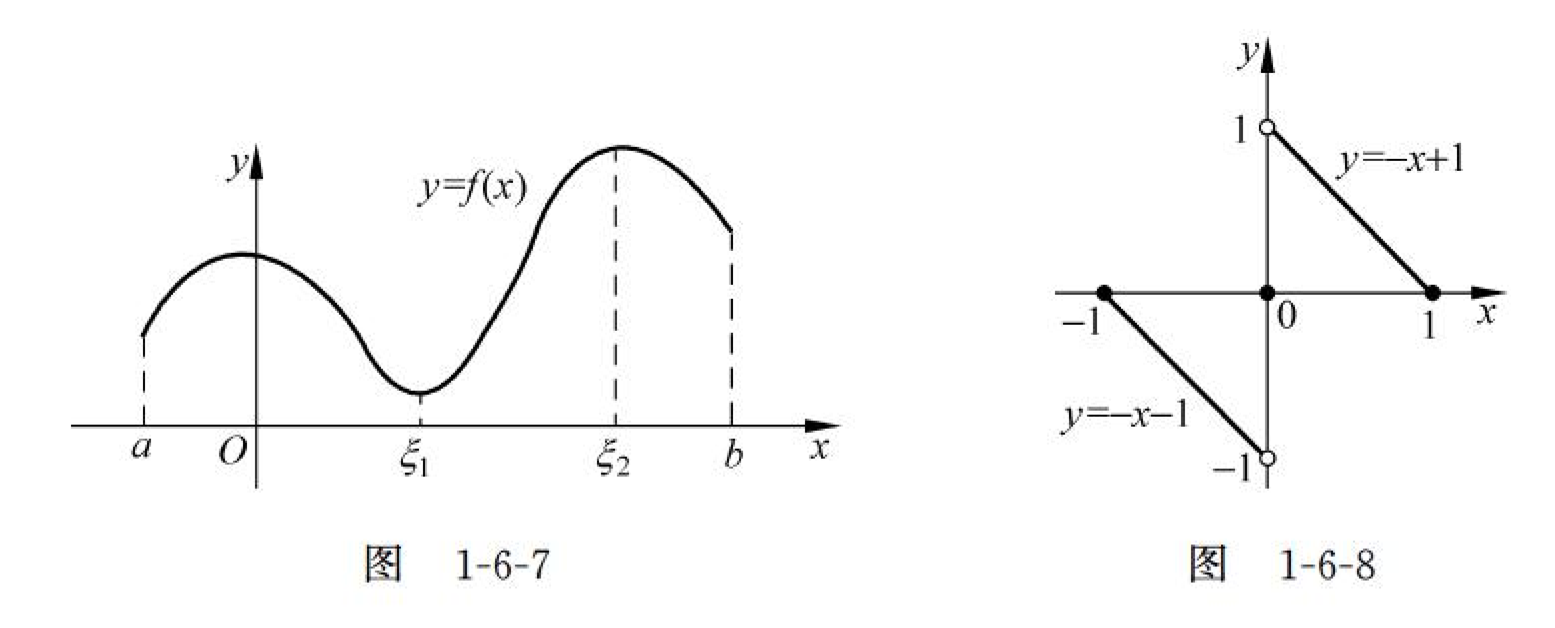


图　1-6-7　　　　图　1-6-8

推论 1-6-1　如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有界。

定理 1-6-5(介值定理)　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，m 与 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值，则对于介于 m 与 M 之间的任意实数 C，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=C$。

推论 1-6-2(零点定理)　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$。

从几何上看，零点定理表示：如果连续曲线弧 $y=f(x)$ 的两个端点位于 x 轴不同侧，

那么这段曲线弧与 x 轴至少有一个交点(图 1-6-9)。

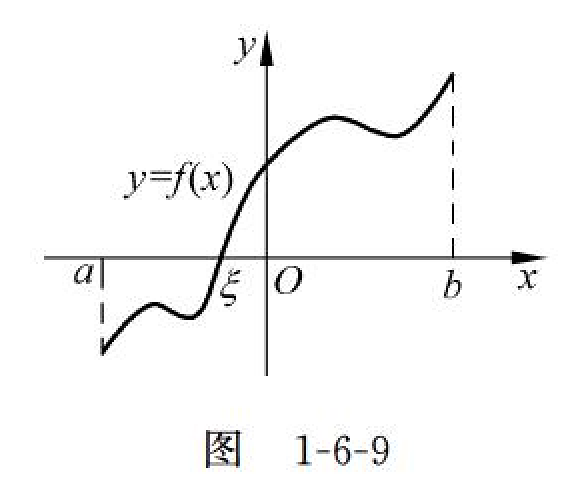


图 1-6-9

例 1-6-8 证明方程 $x^5-3x^3+1=0$ 在区间(0,1)内至少有一个实根。

证明 设 $f(x)=x^5-3x^3+1$，则 $f(x)$在[0,1]上连续，因为 $f(0)=1>0$，$f(1)=-1<0$，根据零点定理，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，即$\xi^5-3\xi^3+1=0$，因此方程 $x^5-3x^3+1=0$ 在区间(0,1)内至少有一个实根。证毕。

习题 1-6

1. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x\leqslant 1\\ x+1 & x>1\end{cases}$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$，$x=1$，$x=2$ 各点的连续性，并画出函数的图像。

2. 求下列函数的间断点，并判断其类型。如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使它连续。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$　　(2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$　　(3) $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$

(4) $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$　　(5) $f(x)=3^{-\frac{1}{x}}+1$　　(6) $f(x)=\begin{cases}x-1 & x\leqslant 1\\ 3-x & x>1\end{cases}$

3. 求下列函数的连续区间，并求极限。

(1) $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$，并求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$、$\lim\limits_{x\to -3}f(x)$及$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$。

(2) $f(x)=\lg(2-x)$，并求 $\lim\limits_{x\to -8}f(x)$。

(3) $f(x)=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$，并求$\lim\limits_{x\to 5}f(x)$。

4. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x & x\leqslant 1\\ a+x & x>1\end{cases}$，要使 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，应当怎样选择数 a？

5. 证明方程 $4x=2^x$ 至少有一个根在 0 与$\dfrac{1}{2}$之间。

6. 证明方程 $x-2\sin x=1$ 至少有一个小于 3 的正根。

7. 证明曲线 $y=x^4-3x^2+7x-10$ 在 $x=1$ 与 $x=2$ 之间至少与 x 轴有一个交点。

*1.7 常用的经济函数

在用数学方法解决经济问题时，往往需要找出经济变量之间的函数关系，建立数学模型。下面介绍几种常用的经济函数。

1.7.1　需求函数与供给函数

1. 需求函数

在经济学中，购买者(消费者)对商品的**需求**这一概念的含义是：购买者既有购买商品的愿望，又有购买商品的能力。也就是说，只有购买者同时具备了购买商品的欲望和支付能力两个条件，才称得上需求。影响需求的因素有很多，如消费者的收入、代用商品的价格、消费者的人数等，这些因素是厂商无法控制的，且在一段时间内不会有太大的变化。因此我们假定消费者的收入、代用商品的价格、消费者的人数等都是常量。这样，商品的市场需求量 Q 就是价格 p 的一元函数，称为**需求函数**，记作

$$Q = Q(p)$$

一般来说，当商品的价格增加时，商品的需求量将会减少，因此需求函数为单调减少函数。

根据市场统计资料，常见的需求函数有以下几种类型。

(1) 线性需求函数：$Q=a-bp(a>0,b>0)$；

(2) 二次需求函数：$Q=a-bp-cp^2(a>0,b>0,c>0)$；

(3) 指数需求函数：$Q=ae^{-bp}(a>0,b>0)$。

需求函数 $Q=Q(p)$的反函数就是**价格函数**，记作

$$P = P(q)$$

它也反映商品的需求与价格的关系。

2. 供给函数

供给是与需求相对的概念，需求是对购买者而言，供给则是对生产者而言。**供给**是指生产者在某一时间内，在各种可能的价格水平上，对某种商品愿意并能够出售的数量。这就是说，作为供给必须具备两个条件：一是有出售的愿望，二是有供应商品的能力，二者缺一不可。供给不仅与生产投入的成本及技术状况有关，而且与生产者对其他商品和劳务价格的预测等因素有关。通常情况下，商品的市场供给量 S 也受商品价格 p 的制约，价格上涨将刺激生产者向市场供给更多的商品，使得供给量增加；反之，价格下跌将使供给量减少。如果忽略其他因素，当供给量只与价格有关时，供给量 S 为价格 p 的一元函数，称为**供给函数**，记作

$$S = S(p)$$

供给函数为价格 p 的单调增加函数。

常见的供给函数有线性函数、二次函数、幂函数、指数函数等。其中，线性供给函数为

$$S = -c + dp \quad (c > 0, d > 0) \tag{1-7-1}$$

如果市场上某商品的需求量恰好等于供给量，则称某商品市场处于**平衡状态**。这时的商品价格 p_0 称为**均衡价格**。当市场价格 p 高于均衡价格 p_0 时，供给量将增加而需求量相应地减少，这时产生的“供大于求”的现象必然使价格 p 下降；当市场价格 p 低于均衡价格 p_0 时，供给量将减少而需求量增加，这时会产生“物资短缺”现象，从而又使得价格 p 上升。市场价格的调节就是这样来实现的。

例 1-7-1 当某种洗衣机每台售价为 500 元时，每月可销售 2000 台；每台售价降为 450 元时，则每月可增销 400 台。试求洗衣机的线性需求函数。

解 设洗衣机的线性需求函数为 $Q=a-bp$，由题意有

$$\begin{cases}2000=a-500b\\2400=a-450b\end{cases}$$

解得 $a=6000$，$b=8$，所求需求函数为 $Q=6000-8p$。

例 1-7-2 当鸡蛋收购价为 4.5 元/kg 时，某收购站每月能收购 5000kg。若收购价每千克提高 0.1 元，则收购量可增加 400kg，求鸡蛋的线性供给函数。

解 设鸡蛋的线性供给函数为 $S=-c+dp$，由题意有

$$\begin{cases}5000=-c+4.5d\\5400=-c+4.6d\end{cases}$$

解得 $c=13000$，$d=4000$，所求供给函数为 $S=-13000+4000p$。

例 1-7-3 已知某商品的需求函数和供给函数分别为

$$Q=14.5-1.5p,\quad S=-7.5+4p$$

求该商品的均衡价格。

解 由供需均衡条件 $Q=S$，可得

$$14.5-1.5p=-7.5+4p$$

解得 $p=4$，即均衡价格为 $p=4$。

1.7.2 总成本函数、收益函数及利润函数

生产某种产品的总成本由固定成本与变动成本两部分组成。固定成本是指厂房、机器设备的折旧费、维修费、保险费、企业管理费、广告费等。显然，当产量在一定范围内变动时，上述开支都基本不变，故称为**固定成本**。而**变动成本**则是指直接用于生产的成本，如原材料费、燃料费、动力费、生产工人的工资、包装费等，一般随产量的增加而增加，它是产量的函数。设产量为 q，固定成本为 C_0，变动成本为 $C_1(q)$，则总成本 C 是产量 q 的函数：

$$C(q)=C_0+C_1(q) \tag{1-7-2}$$

当 $q=0$ 时，总成本就是固定成本，即 $C(0)=C_0$。总成本函数 $C(q)$ 是产量 q 的单调增加函数。最典型的成本函数是三次函数：

$$C=a_0+a_1q+a_2q^2+a_3q^3 \quad (a_i>0,i=0,1,2,3) \tag{1-7-3}$$

但有时为了使问题简化，也常常采用线性成本函数

$$C=a+bq \quad (a>0,b>0) \tag{1-7-4}$$

及二次成本函数。

只给出总成本并不能说明企业生产的好坏。为了评价企业的生产状况，需要计算产品的平均成本，记作 $\overline{C}$：

$$\overline{C}(q)=\frac{C(q)}{q}=\frac{C_0+C_1(q)}{q} \tag{1-7-5}$$

其中，$\frac{C_1(q)}{q}$ 称为平均可变成本。

如果商品的销售单价为 p，销售量为 q，则总收益函数为

$$R(q) = pq \tag{1-7-6}$$

若 p 为常数，则 R 为 q 的正比例函数。若考虑产品销售时的附加费用、折扣等因素，这时作为平均值的单价 p 受产量 q 变化的影响，不再为常量，记作 $p=p(q)$，则有

$$R(q) = p(q)q \tag{1-7-7}$$

产品销售后得到的总利润 $L(q)$ 等于总收益 $R(q)$ 减去总成本 $C(q)$，即

$$L(q) = R(q) - C(q) \tag{1-7-8}$$

如果收益等于总成本，即 $R(q)=C(q)$，则既不盈利也不亏本，此时的产量或销售量为生产部门的**保本点**，或称为**盈亏转折点**。

例 1-7-4　已知某产品的总成本函数为 $C(q)=3000+\frac{q^2}{2}$，求生产 100 件此产品时的总成本和平均成本。

解　依题意，产量为 100 件时的总成本为

$$C(100) = 3000 + \frac{100^2}{2} = 8000$$

产量为 100 件时的平均成本为

$$\overline{C}(100) = \frac{C(100)}{100} = \frac{8000}{100} = 80$$

例 1-7-5　某工厂生产某产品每吨售价 2000 元，若每天生产 q 吨的总成本为 C 千元，则有 $C=q^2-4q+5$，求该厂的盈亏转折点。

解　总收入 $R=2q$，设 $R=C$，则

$$2q = q^2 - 4q + 5$$

解得 $q_1=1$，$q_2=5$。即该厂盈亏转折点有两个，分别生产 1 吨和 5 吨。

这两个保本点在性质上有什么不同呢？考虑利润：

$$L = R - C = 2q - (q^2 - 4q + 5) = -(q-1)(q-5)$$

显然，当 $q<1$ 或 $q>5$ 时，$L<0$；当 $1<q<5$ 时，$L>0$。这说明第一个转折点 $q_1=1$ 是该厂保本的最低产量；第二个转折点 $q_2=5$ 是保本的最高产量，当生产超过每天 5 吨时，工厂同样要亏本。

习题 1-7

1. 某厂生产产品 1000 吨，定价为每吨 130 元。当售出量不超过 700 吨，按原价出售；超过 700 吨的部分按原价的九折出售。试将销售收入表示成销售量的函数。

2. 某种品牌的电视机每台售价 500 元时，每月可销售 2000 台；每台售价 450 元时，每月可多销售 400 台。试求该电视机的线性需求函数。

3. 已知需求函数为 $Q=\frac{100}{3}-\frac{2}{3}p$，供给函数为 $S=-20+10p$，求市场均衡价格。

4. 某玩具厂每天生产 60 个玩具的成本为 300 元，每天生产 80 个玩具的成本为 340 元，求其线性成本函数。问每天的固定成本和生产一个玩具的变动成本各为多少？

第2章

一元函数微分学

本章主要介绍一元函数微分学中的一些基本知识：导数的概念，函数的和、差、积、商的求导法则，反函数的导数，复合函数的求导法则，隐函数求导法和对数求导法，由参数方程所确定的函数的导数，初等函数的求导问题，高阶导数，函数的微分，微分在近似计算中的应用，中值定理，洛必达法则，函数单调性的判定法，函数的极值及其求法，最大值与最小值问题，曲线的凹凸性及拐点，函数图形的描绘，边际概念和需求弹性概念，曲率和曲率半径的概念等。

2.1 导数的概念

在实际应用中，经常会遇到有关变化率的问题。

2.1.1 函数的变化率

例 2-1-1 变速直线运动的瞬时速度。

设一质点按某种规律做变速直线运动，质点运动的路程 S 与时间 t 的关系为 $S=S(t)$。现讨论质点在 t_0 时刻的瞬时速度。

分析 虽然整体来说速度是变的，但局部来说速度可以近似地看成不变。当 Δt 很小时，可以认为，从时刻 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这一段时间内，速度来不及有很大变化，近似地看成做匀速直线运动，因而这段时间内的平均速度就可以看成 t_0 时刻的瞬时速度的近似值。

Δt 越小，平均速度就越接近 t_0 时刻的瞬时速度。令 $\Delta t\to 0$，平均速度的极限即为 t_0 时刻的瞬时速度。即极限值 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$ 精确地反映了质点在 t_0 时刻的瞬时速度。

解

(1) 质点从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这一段时间内所走过的路程为

$$\Delta S = S(t_0+\Delta t)-S(t_0)$$

(2) 质点从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这一段时间内的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$$

(3) 求极限：

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$$

可见，$v(t_0)$就是路程函数 $S=S(t)$在 $t=t_0$ 的变化率。

例 2-1-2　切线问题。

设点 $P_0(x_0,y_0)$为曲线 $y=f(x)$上的一个定点，为求曲线 $y=f(x)$在点 P_0 的切线，可在曲线上取邻近于 P_0 的点 $P(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，算出割线 P_0P 的斜率：

$$\tan\beta=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

其中 β 为割线 P_0P 的倾斜角(图 2-1-1)。当 $\Delta x\to 0$时，P 就沿着曲线移动趋向于 P_0 点，这时割线 P_0P 就以 P_0 点为支点逐渐转动而趋于一极限位置，即为直线 P_0T，直线 P_0T 即为曲线 $y=f(x)$在 P_0 点处的切线。相应地，割线 P_0P 的斜率 $\tan\beta$ 随 $\Delta x\to 0$ 而趋于切线 P_0T 的斜率 $\tan\alpha$(α 是切线的倾斜角)，即

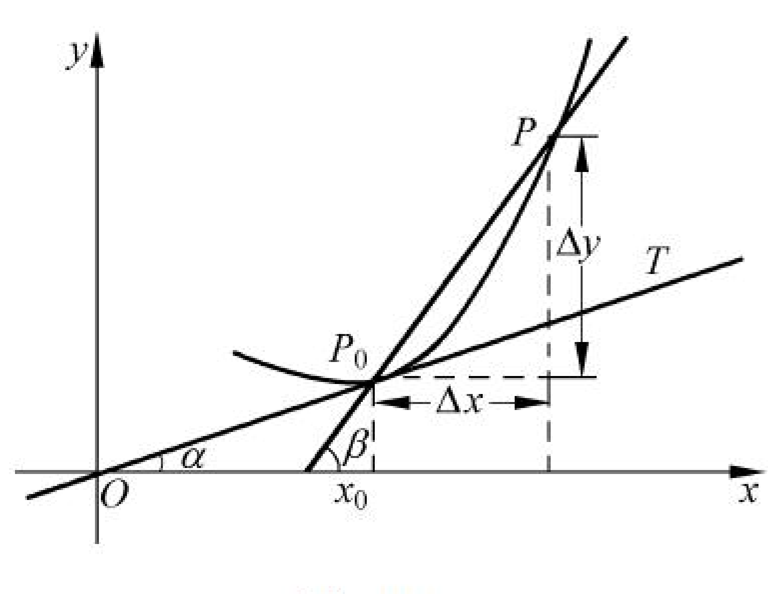


图　2-1-1

$$\tan\alpha=\lim_{\beta\to\alpha}\tan\beta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

这里，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$是函数的增量与自变量的增量之比，它表示函数的平均变化率。

上面所讲的瞬时速度和切线斜率，虽然它们来自不同的具体问题，其实质是一样的，都是函数的改变量与自变量的改变量之比，当自变量的改变量趋于零时的极限。在实际应用中，我们会经常遇到从数学结构上看，形式完全相同的各种各样的变化率，从而有必要从中抽象出一个数学概念来加以研究。

2.1.2　导数的定义

定义 2-1-1　设函数 $y=f(x)$在$U(x_0)$内有定义，给 x_0 一个改变量 Δx，使得$(x_0+\Delta x)\in U(x_0)$，函数 $y=f(x)$相应地有改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\tag{2-1-1}$$

存在，那么就称此极限为函数 $f(x)$在 x_0 点的**导数**(或**微商**)，记作

$$f'(x_0)\ 或\ y'\big|_{x=x_0}\ 或\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}$$

并称函数 $f(x)$在点 x_0 处是可导的。

若式(2-1-1)的极限不存在，则称函数 $f(x)$在点 x_0 处是不可导的。

有时为了方便，也经常把极限式(2-1-1)改写为如下形式：

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\quad(\Delta x=h)$$

或

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\quad(\Delta x=x-x_0)$$

由导数的定义可知，按照导数的定义求函数的导数可以分为3个步骤。

(1) 求增量：$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

(2) 算比值：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(3) 求极限：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

例 2-1-3 求函数 $y=x^2$ 在点 $x=1$ 处的导数。

解 按照导数定义，给 $x_0=1$ 一个改变量 Δx。

首先求增量： $\Delta y=(1+\Delta x)^2-1=2\Delta x+(\Delta x)^2$

再算比值： $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2+\Delta x$

再求极限： $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=2+0=2$

所以，$y'|_{x=1}=2$。

若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内任一点都可导，则称**函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导**。

此时，对于区间 (a,b) 内的每一个 x 值，都有一个确定的导数 $f'(x)$ 与之对应，也就是说 $f'(x)$ 仍是 x 的函数，我们称之为函数 $f(x)$ 的**导函数**。为了方便起见也称导函数为**导数**，记作

$$f'(x)\quad 或\quad y'\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

显然，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$，就是导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的函数值，即

$$f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}$$

对于闭区间 $[a,b]$ 的左端点 a 来说，函数 $f(x)$ 只能有右极限，而对右端点 b 来说，函数 $f(x)$ 只能有左极限。由此引出**左导数**、**右导数**的概念。

定义 2-1-2 如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**左导数**，记作 $f'_-(x_0)$（此时也称 $f(x)$ 在 x_0 处左可导）；如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**右导数**，记作 $f'_+(x_0)$（此时也称 $f(x)$ 在 x_0 处右可导）。

由极限性质即得定理2-1-1。

定理 2-1-1 函数 $f(x)$ 在 x_0 点处可导的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在 x_0 点处左、右导数都存在且相等。

*例 2-1-4　设 $f(x)=\begin{cases}1-x & x<0\\ 1+x & x\geqslant 0\end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处是否可导。

解　由

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(1-\Delta x)-1}{\Delta x}=-1$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(1+\Delta x)-1}{\Delta x}=1$$

知

$$f'_+(0)\neq f'_-(0)$$

所以，$f(x)$ 在 $x_0=0$ 处不可导。

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)$ 及 $f'_-(b)$ 都存在，就说 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导。

2.1.3　导数的几何意义

在例 2-1-2 中我们用极限的方法求出函数 $y=f(x)$ 所表示的曲线在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处切线的斜率为

$$\tan\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

即函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点处的导数 $f'(x_0)$，就是曲线 $y=f(x)$ 在 x_0 点处的切线的斜率，这就是导数的几何意义。

从而可知，当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

例 2-1-5　求曲线 $y=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程和法线方程。

解　函数 $y=x^2$ 的导数为 $y'=2x$。在点 $x=1$ 处的导数为 $y'\big|_{x=1}=2$。

根据导数的几何意义，曲线 $y=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线的斜率为 2。

故切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $2x-y-1=0$。

法线方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$，即 $-\frac{1}{2}x-y+\frac{3}{2}=0$。

2.1.4　可导与连续的关系

定理 2-1-2　若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点处可导，则函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点处连续。

证明　因为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点处可导，所以由导数定义，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0$$

上式表明当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$。由连续的定义可知，$y=f(x)$ 在 x_0 点处连续。证毕。

但定理的逆命题不成立，即函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续，不一定有 $y=f(x)$ 在 x_0 点可导。可以看一个例子。

例 2-1-6 证明函数 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处连续，但 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导。

证明 由于 $f(x)=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$，显然，$f(x)=|x|$ 在任何点（包括原点）处都是连续的。考虑 $y=|x|$ 在点 $x=0$ 处的左、右导数为

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

由此可见

$$f'_+(0)\neq f'_-(0)$$

即 $f'(0)$ 不存在，所以 $y=|x|$ 在点 $x=0$ 处不可导。证毕。

该定理说明函数在某点连续是函数在该点可导的必要条件，但不是充分条件。

习题 2-1

1. 求函数 $y=x^3$ 在点 $x=1$ 处的导数。
2. 求曲线 $y=\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程和法线方程。
3. 曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 在哪一点处的切线与直线 $y=3x-1$ 平行？
4. 证明函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在点 $x=0$ 处连续，但 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导。

*5. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$，求 $f'_+(0)$ 及 $f'_-(0)$，并判断 $f'(0)$ 是否存在。

*6. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

*7. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leqslant 1 \\ ax+b & x>1 \end{cases}$，为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导，a,b 应取什么值？

2.2 导数的计算

2.2.1 用导数的定义求导

例 2-2-1 证明常数函数的导数 $(C)'=0$。

证明 设 $y=C$。

求增量：
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0$$

算比值：
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0$$

求极限：
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$$

即$(C)'=0$。

证毕。

例 2-2-2　证明指数函数的导数$(a^x)'=a^x\ln a$。

证明　设 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$。

求增量：　$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$

算比值：　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$

求极限：　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$

令 $a^{\Delta x}-1=u$，则 $\Delta x=\dfrac{\ln(u+1)}{\ln a}$，且当 $\Delta x\to 0$ 时 $u\to 0$。于是

$$a^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\cdot\lim_{u\to 0}\frac{u\cdot\ln a}{\ln(u+1)}=a^x\ln a\cdot\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}}=a^x\ln a$$

即
$$(a^x)'=a^x\ln a$$

证毕。

特别地，有
$$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$$

例 2-2-3　证明正弦函数的导数$(\sin x)'=\cos x$。

证明　设 $y=\sin x$。

求增量：　$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$

算比值：　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}$

求极限：由 $\cos x$ 的连续性，得
$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$$

且有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}=1$，因此

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}=\cos x$$

即
$$(\sin x)'=\cos x$$

证毕。

类似地可以得到

$$(\cos x)' = -\sin x$$

2.2.2 导数的四则运算法则

本节我们再根据导数的定义，推出导数的四则运算法则。借助于这个法则，就能比较方便地求出比较复杂的函数的导数。

定理 2-2-1 设函数 $u(x)$，$v(x)$在点 x 处可导，则函数 $u(x)\pm v(x)$，$u(x)v(x)$，$\dfrac{u(x)}{v(x)}$ $(v(x)\neq 0)$分别也在点 x 处可导，且有

(1) $[u(x)\pm v(x)]' = u'(x)\pm v'(x)$

(2) $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

(3) $[Cu(x)]' = Cu'(x)$

(4) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

证明 (2) 令 $y=u(x)v(x)$，则先求增量：

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) \\ &= [u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x) + u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)] \\ &= \Delta u \cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot \Delta v\end{aligned}$$

算比值：
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

由于 $v(x)$在点 x 处可导，故它在点 x 处必连续，因此有$\lim\limits_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x) = v(x)$。

求极限：

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x) + u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} \\ &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\end{aligned}$$

所以 $y=u(x)v(x)$也在 x 处可导，且有

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

其他证明从略，请读者自己完成。证毕。

由定理 2-2-1 的(1)、(3)两式可知，求有限多个函数的线性组合的导数，可以先求每个函数的导数，然后再线性组合，即

$$\left[\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)\right]' = \sum_{i=1}^{n} a_i f'_i(x)$$

例 2-2-4 设 $f(x)=x^4+2x^2+6x+10$，求 $f'(x)$。

解 $$f'(x) = (x^4)' + (2x^2)' + 6x' + 10' = 4x^3+4x+6$$

例 2-2-5 设 $y=x^3\mathrm{e}^x$，求 y'。

解 $$y' = (x^3)'\mathrm{e}^x + x^3(\mathrm{e}^x)' = 3x^2\mathrm{e}^x + x^3\mathrm{e}^x = (3+x)x^2\mathrm{e}^x$$

例 2-2-6 求 $y=x^2+\sin x-\dfrac{\ln x}{x}$的导数。

解
$$y' = 2x + \cos x - \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2}$$
$$= 2x + \cos x - \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

例 2-2-7 求 $y=\tan x$ 的导数。

解
$$y' = (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

即
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

这就是正切函数的导数公式。

用同样的方法可以求出
$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

例 2-2-8 求 $y=\sec x$ 的导数。

解 $y' = (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{(1)'\cos x - 1 \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x$

即
$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

用同样的方法可以求出
$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

2.2.3 反函数求导法则

定理 2-2-2 设函数 $y=f(x)$在 x 处有不等于零的导数，且有反函数 $x=f^{-1}(y)$在相应点处连续，则
$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} \quad 或 \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$
即反函数的导数等于其直接函数导数的倒数。

例 2-2-9 对数函数的导数。设 $y=\log_a x\,(x>0, a>0, a\neq 1)$，求 y'。

解 $y=\log_a x\,(x>0, a>0, a\neq 1)$的反函数为
$$x = a^y$$

由反函数求导法则得
$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

特别地，有
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

例 2-2-10 反正弦函数的导数。设 $y=\arcsin x$，求 y'。

解 $y=\arcsin x(-1<x<1)$的反函数为

$$x=\sin y\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$$

由反函数求导法则得

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}$$

因为$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$。于是

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1)$$

同理可得反余弦函数的导数为

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1)$$

例 2-2-11 反正切函数的导数。设 $y=\arctan x$，求 y'。

解 $y=\arctan x(-\infty<x<+\infty)$的反函数为

$$x=\tan y\quad\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$$

由反函数求导法则得

$$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}$$

又 $$\sec^2 y=1+\tan^2 y=1+x^2$$

因此 $$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

同理可得反余切函数的导数为

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

2.2.4 复合函数的导数

定理 2-2-3 设 $y=f[\varphi(x)]$是由函数 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的，若函数 $u=\varphi(x)$在点 x 处有导数 $u'_x=\varphi'(x)$，又函数 $y=f(u)$在对应点 u 处有导数 $y'_u=f'(u)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点 x 处也有导数，$[f(\varphi(x))]'=f'(u)\cdot\varphi'(x)=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$。简记为

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x\quad\text{或}\quad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

这个定理可以简叙为：复合函数 y 对自变量 x 的导数，等于 y 对中间变量 u 的导数乘以中间变量 u 对自变量 x 的导数。

***证明** 函数 $y=f(u)$在点 u 处可导，即$\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u$存在。根据极限与无穷小的关系，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u+\alpha \quad (\lim_{\Delta u\to 0}\alpha=0)$$

上式两边同乘以 Δu,得

$$\Delta y=y'_u\Delta u+\alpha\Delta u \quad (\Delta u\to 0)$$

上式两边同时除以 Δx,得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_u\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

又由于 $u=\varphi(x)$在点 x 处可导,因此函数 $u=\varphi(x)$在点 x 处连续,即当 $\Delta x\to 0$ 时,$\Delta u\to 0$。因此有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=\lim_{\Delta u\to 0}\alpha=0$$

令 $\Delta x\to 0$,上式两边同时取极限,得到

$$\begin{aligned} y'_x&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(y'_u\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\ &=y'_u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\ &=y'_u\cdot u'_x+0\cdot u'_x=y'_u\cdot u'_x \end{aligned}$$

证毕。

例 2-2-12　幂函数的导数。设 $y=x^\alpha$,求 y'。

解　$y=x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$。此题等价于求函数 $y=e^{\alpha\ln x}$的导数。

令 $u=\alpha\ln x$,函数 $y=e^{\alpha\ln x}$可看成是由 $y=e^u$ 与 $u=\alpha\ln x$ 复合而成的:

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=(e^u)'u'(x)=e^u\cdot(\alpha\ln x)'=e^u\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$$

即

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$$

通常写作

$$(x^n)'=nx^{n-1}\quad (n\text{ 为正整数})$$

例 2-2-13　求 $y=e^{x^3}$ 的导数。

解　$y=e^{x^3}$ 可看作由 $y=e^u$,$u=x^3$ 复合而成,因此

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=e^u\cdot 3x^2=3e^{x^3}x^2$$

例 2-2-14　求函数 $y=\sqrt{3x^2+4}$的导数。

解　$y=\sqrt{3x^2+4}$可看作由 $y=\sqrt{u}$,$u=3x^2+4$ 复合而成,因此

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(6x)=\frac{3x}{\sqrt{3x^2+4}}$$

定理 2-2-3 的结论可以推广到多层次复合的情况。例如,设 $y=f(u)$,$u=\varphi(v)$,$v=\psi(x)$,则复合函数 $y=f(\varphi(\psi(x)))$的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x$$

上述公式一般称为复合函数求导数的链式法则。

例 2-2-15　求函数 $y=\sin^2(2-3x)$的导数。

解　$y=\sin^2(2-3x)$可看作由 $y=u^2$,$u=\sin v$,$v=2-3x$ 复合而成,因此

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = 2u \cdot (\cos v) \cdot (-3)$$
$$= 2\sin(2-3x) \cdot \cos(2-3x) \cdot (-3) = -3\sin(4-6x)$$

在熟练掌握复合函数的求导公式后，求导时将不必写出中间过程和中间变量。

例 2-2-16 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的导数。

解
$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})'$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

例 2-2-17 求函数 $y=\arcsin(2\cos(x^2-1))$ 的导数。

解
$$y' = \arcsin(2\cos(x^2-1))'$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-[2\cos(x^2-1)]^2}}(2\cos(x^2-1))'$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-4\cos^2(x^2-1)}} \cdot 2[-\sin(x^2-1)] \cdot (x^2-1)'$$
$$= \frac{-2\sin(x^2-1)}{\sqrt{1-4\cos^2(x^2-1)}} \cdot 2x$$
$$= -\frac{4x\sin(x^2-1)}{\sqrt{1-4\cos^2(x^2-1)}}$$

2.2.5 隐函数的导数

前面介绍的求导法则都是针对显函数的。所谓**显函数**就是把函数 y 直接表示成自变量 x 的函数 $y=f(x)$，如 $y=x+1$，$y=\sin x$ 等。在很多实际问题中，x 与 y 之间的函数关系是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的，即 y 与 x 之间的函数关系隐含在方程中，这样的函数称为**隐函数**。例如：

$$xy = e^x,\quad \sin(xy)-2x+1=0,\quad e^x+e^y-xy=0$$
$$2x+y-1=0,\quad x^2+y^2=4$$

有些隐函数可以转换成显函数。例如，$2x+y-1=0$ 可以转换为 $y=1-2x$。有些隐函数则不能化成显函数，如 $e^x+e^y-xy=0$。所以要研究从隐函数直接求其导数的方法。

隐函数求导的方法是：方程两端同时对 x 求导，并在求导过程中将 y 看作 x 的函数，即遇到含有 y 的项，先对 y 求导，再乘以 y 对 x 的导数 y'，得到一个含有 y' 的方程式，然后从中解出 y'。

例 2-2-18 求由方程 $x^2+y^2=4$ 确定的隐函数的导数 y'。

解 将方程两边分别对 x 求导，得

$$2x+2y \cdot y' = 0$$

由此解出

$$y' = -\frac{x}{y}$$

例 2-2-19　求由方程 $e^y = xy$ 所确定的隐函数的导数 y'。

解　将方程两边分别对 x 求导，得

$$e^y \cdot y' = y + xy'$$

即

$$(e^y - x) \cdot y' = y$$

由此解出

$$y' = \frac{y}{e^y - x}$$

例 2-2-20　求椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 在点 $\left(2, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ 处的切线方程。

解　由导数的几何意义知，所求切线的斜率为 $k = y'$。

在椭圆方程两边分别对 x 求导，得

$$\frac{x}{8} + \frac{2yy'}{9} = 0$$

由此解出

$$y' = -\frac{9x}{16y}$$

把 $x = 2, y = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ 代入上式，得

$$k = y'\Big|_{\substack{x=2\\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

故所求的切线方程为

$$y - \frac{3}{2}\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{4}(x - 2)$$

即

$$\sqrt{3}x + 4y - 8\sqrt{3} = 0$$

利用隐函数求导法则，对于若干个因子的幂的乘积或幂指函数 $y = [f(x)]^{g(x)}$ 的导数问题，下面介绍一种利用对数的性质来简化导数计算的方法：对数求导方法。

对数求导法：先将方程两边同时取自然对数，然后应用隐函数求导法求导。

例 2-2-21　求 $y = x^{\sin x}$ 的导数。

解　对上式两边取对数，得

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x$$

将上式两边同时对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

解得

$$y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

例 2-2-22　求 $y = \frac{(x+1)^3\sqrt{x+2}}{(x+3)^5}$ 的导数。

解 对上式两边取对数，得

$$\ln y = 3\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x+2) - 5\ln(x+3)$$

将上式两边同时对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y' = \frac{3}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+2} - \frac{5}{x+3}$$

解得

$$\begin{aligned} y' &= y\left(\frac{3}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+2} - \frac{5}{x+3}\right) \\ &= \frac{(x+1)^3\sqrt{x+2}}{(x+3)^5}\left(\frac{3}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+2} - \frac{5}{x+3}\right) \end{aligned}$$

例 2-2-23 求 $y=\dfrac{xe^{x^2}}{(x-1)^6}$ 的导数。

解 对上式两边取对数，得

$$\ln y = \ln x + x^2 - 6\ln(x-1)$$

将上式两边同时对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + 2x - \frac{6}{x-1}$$

解得

$$y' = \frac{xe^{x^2}}{(x-1)^6}\left(\frac{1}{x} + 2x - \frac{6}{x-1}\right)$$

从上述几例可以看出，用对数求导方法比直接应用求导法则明显简单得多。

为了便于查阅，现将基本初等函数的求导公式列表如下。

(1) $(C)'=0$

(2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

(3) $(a^x)'=a^x\ln a$

(4) $(e^x)'=e^x$

(5) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

(6) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

(7) $(\sin x)'=\cos x$

(8) $(\cos x)'=-\sin x$

(9) $(\tan x)'=\sec^2 x$

(10) $(\cot x)'=-\csc^2 x$

(11) $(\sec x)'=\sec x \cdot \tan x$

(12) $(\csc x)'=-\csc x \cdot \cot x$

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

(16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

*2.2.6 由参数方程所确定的函数的导数

一般地，若由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\phi(t) \end{cases}$ 确定 y 与 x 的函数关系，则称此函数关系所表达的函数为由参数方程所确定的函数。

在实际问题中,需要计算由参数方程所确定的函数的导数。由于从参数方程中消去参数 t 有时会有困难,因此,希望有一种方法能直接由参数方程求出它所确定的函数的导数。下面讨论由参数方程所确定的函数的求导方法。

设 $x=\varphi(t)$ 具有单调连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$,则此反函数能与函数 $y=\psi(t)$ 复合成复合函数,因此由参数方程所确定的函数可以看作由函数 $y=\psi(t)$ 及 $t=\varphi^{-1}(x)$ 复合而成的函数 $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$。现在,要计算这个复合函数的导数。为此再假定函数 $x=\varphi(t)$,$y=\psi(t)$ 都可导,且 $\varphi'(t)\neq 0$,于是根据复合函数的求导法则与反函数的导数公式,就有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\quad \text{或}\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

这就是由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 所确定的函数的导数公式。

例 2-2-24　求由参数方程 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos 2t\end{cases}$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解　因为 $y'(t)=-2\sin 2t$,$x'(t)=\cos t$,所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{-2\sin 2t}{\cos t}=-4\sin t$$

例 2-2-25　椭圆的参数方程是 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$,求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及椭圆在相应于 $t=\frac{\pi}{4}$ 点处的切线方程。

解　因为 $y'(t)=b\cos t$,$x'(t)=-a\sin t$,所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t$$

所求切线的斜率为 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{b}{a}$。切点的坐标为

$$x_0=a\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}a,\quad y_0=b\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}b$$

则椭圆在相应于 $t=\frac{\pi}{4}$ 点处的切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}b=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$$

即

$$bx+ay-\sqrt{2}ab=0$$

2.2.7 高阶导数

在运动学中，不但需要了解物体运动的速度，而且需要了解物体运动速度的变化，即加速度问题。例如，自由落体的运动方程为

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

物体在 t 时刻的瞬时速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{1}{2}gt^2\right)'=gt$$

物体在 t 时刻的加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(gt)'=g$$

以上为物理学中所熟悉的公式。我们对一个可导函数求导之后，还需要研究其导函数的导数问题。为此给出定义 2-2-1。

定义 2-2-1 如果函数 $y=f(x)$ 在 x 处可导，若 $f'(x)$ 的导数存在，则称该导数为 $y=f(x)$ 的**二阶导数**，记作

$$f''(x),y'',\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}$$

即

$$y''=(y')'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$$

若函数 $y''=f''(x)$ 的导数存在，则称该导数为 $y=f(x)$ 的**三阶导数**，记作 y'''，或 $f'''(x)$。

一般地，若 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}$ 的导数存在，则称该导数为 $y=f(x)$ 的 n 阶导数，记作

$$y^{(n)},f^{(n)}(x),\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n},\frac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}x^n}$$

函数的二阶和二阶以上的导数统称为**高阶导数**。四阶或四阶以上的导数记作 $f^{(k)}(x)(k\geqslant 4)$。函数 $f(x)$ 的 n 阶导数在 $x=x_0$ 处的导数值记作 $f^{(n)}(x_0)$，$y^{(n)}(x_0)$ 或 $\left.\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x_0}$ 等。

由上述定义可见，求高阶导数就是多次接连地求一阶导数，所以只须应用前面学过的求导方法就能计算高阶导数。

例 2-2-26 设 $f(x)=x^3$，求 $f^{(n)}(x)$。

解

$$f'(x)=3x^2,\qquad f''(x)=(3x^2)'=6x$$

$$f'''(x)=(6x)'=6,\qquad f^{(4)}(x)=(6)'=0$$

$$f^{(n)}(x)=0\quad(n>4)$$

一般地，对于 n 次多项式 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，有

$$P^{(n)}(x)=a_0n!,\quad P^{(k)}(x)=0\quad(k>n)$$

例 2-2-27　设 $y=e^{ax}(a\neq 0)$，求 $y^{(n)}$。

解

$$y'=(e^{ax})'=ae^{ax}$$

$$y''=(ae^{ax})'=a^2e^{ax}$$

用数学归纳法得

$$y^{(n)}=a^ne^{ax}$$

特例：

$$(e^x)^{(n)}=e^x$$

例 2-2-28　设 $y=\ln(1+x)$，求 $y^{(n)}$。

解

$$y'=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$$

$$y''=\frac{-1}{(1+x)^2}=(-1)(1+x)^{-2}$$

$$y'''=\frac{2}{(1+x)^3}=(-1)(-2)(1+x)^{-3}$$

设当 $n=k$ 时有下式成立：

$$y^{(k)}=(-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$$

则当 $n=k+1$ 时有

$$\begin{aligned}y^{(k+1)}&=(y^{(k)})'=(-1)^{k-1}(k-1)!(-k)(1+x)^{-k-1}\\&=(-1)^kk!(1+x)^{-(k+1)}\end{aligned}$$

从而有

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}=\frac{(-1)^n(n-1)!}{(1+x)^n}$$

例 2-2-29　证明 $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$。

证明

$$(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}(\sin x)''&=\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]'=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\\&=\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\sin(x+\pi)\end{aligned}$$

设当 $n=k$ 时有下式成立：

$$(\sin x)^{(k)}=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$$

则当 $n=k+1$ 时有

$$\begin{aligned}(\sin x)^{(k+1)}&=\left[\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\\&=\sin\left[\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left(x+\frac{k+1}{2}\pi\right)\end{aligned}$$

从而有

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

同理可得
$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

证毕。

例 2-2-30 求由方程 $x+2y-\cos y=0$ 所确定的隐函数 y 的二阶导数 y''。

解 将等式两边分别对 x 求导，得
$$1+2y'+y'\sin y=0 \tag{2-2-1}$$
即
$$y'=\frac{-1}{2+\sin y} \tag{2-2-2}$$
再将式 2-2-1 两边对 x 求导，得
$$2y''+(y')^2\cos y+y''\sin y=0$$
即
$$y''=\frac{-(y')^2\cos y}{2+\sin y}=\frac{-\left(\frac{-1}{2+\sin y}\right)^2\cos y}{2+\sin y}=\frac{-\cos y}{(2+\sin y)^3}$$

在参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ 中，若 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 是二阶可导的，则从参数方程的一阶导数公式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ 可得到参数方程的二阶导数公式：
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$
即
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

这就是由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ 所确定的函数的二阶导数公式。

例 2-2-31 求由参数方程 $\begin{cases}x=\sin t\\y=\cos t\end{cases}$ 确定的函数 $y=f(x)$ 的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

解 因为 $y'(t)=-\sin t$，$x'(t)=\cos t$，所以
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{-\sin t}{\cos t}=-\tan t$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\tan t)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-\sec^2 t}{\cos t}=\frac{-1}{\cos^3 t}$$

例 2-2-32 求由参数方程 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 确定的函数 $y=f(x)$ 的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

解 因为 $y'(t)=a\sin t$，$x'(t)=a(1-\cos t)$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{\cos t-1}{(1-\cos t)^2}}{a(1-\cos t)}=\frac{-1}{a(1-\cos t)^2}$$

习题 2-2

1. 求下列函数的导数。

(1) $y=x+2\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}$ (2) $y=x^3\mathrm{e}^x+\sqrt{x}-2$

(3) $y=x\mathrm{e}^x\ln x$ (4) $y=\sin x\cos x$

(5) $y=x^2\ln x$ (6) $y=\mathrm{e}^x\cos x$

(7) $y=\frac{\ln x}{x}$ (8) $y=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}+1$

2. 求下列函数的导数。

(1) $y=\arcsin\sqrt{x}$ (2) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $y=\ln\ln\ln x$ (4) $y=\arctan\frac{1}{x}$

(5) $y=\ln\sin x$ (6) $y=\cos\ln(1+2x)$

(7) $y=\sqrt{1-x^2}$ (8) $y=\mathrm{e}^{\sqrt{1-\sin x}}$

(9) $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x-2}}$ (10) $y=\arccos(3x^2)$

3. 求下列方程所确定的隐函数的导数。

(1) $xy+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y-\mathrm{e}=0$ (2) $y=\cos(xy)$

(3) $y=\sin(x+y)$ (4) $\sin y+x\mathrm{e}^y=0$

(5) $xy^2+\sin x=\mathrm{e}^{xy}$ (6) $xy+\mathrm{e}^y=\mathrm{e}$

4. 求下列参数方程的导数。

(1) $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\cos t\\y=\mathrm{e}^t\sin t\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=t\ln t\\y=\ln^2 t\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\y=a\sin^3 t\end{cases}$

5. 求下列函数的二阶导数。

(1) $y=\mathrm{e}^{2x-1}$ (2) $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$

(3) $y=x\cos x$ (4) $y=x^3(\sqrt{x}+1)$

（5）$y=\sqrt{a^2-x^2}$　　（6）$y=\ln(1-x^2)$

（7）$\begin{cases}x=3e^{-t}+1\\y=2e^t\end{cases}$　　（8）$\begin{cases}x=\dfrac{t^2}{2}-3\\y=1-t\end{cases}$

（9）$\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases}$　　（10）$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\y=t-\arctan t\end{cases}$

6. 求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数。

（1）$x+y-\dfrac{1}{2}\sin y=0$　　（2）$y=\sin(x+y)$

2.3 微分

2.3.1 微分的概念

在许多实际问题中，我们经常需要了解函数在某一点处当自变量有一个微小的改变量时，函数取得相应改变量的大小，而用公式 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 计算，往往是比较麻烦的，于是我们想要寻求一种当 Δx 很小时，能近似代替 Δy 的量。

例 2-3-1 一块正方形金属薄片受温度变化的影响，其边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$，问此薄片的面积改变了多少？

解 设此薄片的边长为 x，面积为 A，则 A 是边长 x 的函数，即 $A=x^2$。如图 2-3-1 所示，薄片受温度变化的影响时，面积的改变量为

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$$

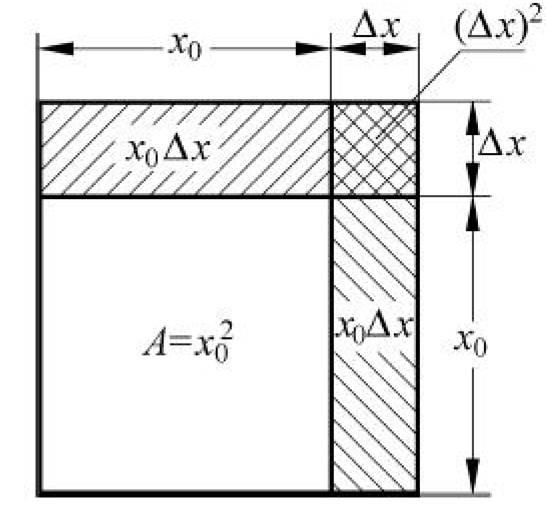


图 2-3-1

从上式可以看出，ΔA 分成两部分，第一部分 $2x_0\Delta x$ 是 ΔA 的线性函数，即图 2-3-1 中带有斜线底纹的两个矩形面积之和。它是当 $\Delta x\to 0$ 时，与 Δx 同阶的无穷小。而第二部分 $(\Delta x)^2$，在图中是带有交叉斜线底纹的小正方形的面积，它是当 $\Delta x\to 0$ 时，比 Δx 高阶的无穷小，即 $(\Delta x)^2=o(\Delta x)$。此时 $\Delta A=2x_0\Delta x+o(\Delta x)$。这表明当 $\Delta x\to 0$ 时，第二部分的绝对值要比第一部分的绝对值小得多，可以忽略不计。由此可见，如果边长改变很微小，即 $\Delta x\to 0$ 时，面积的改变量 ΔA 可近似地用第一部分 $2x_0\Delta x$ 来代替。

由此引进函数微分的概念。

定义 2-3-1 设函数 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义，给 x_0 一个增量 Δx，使得 $(x_0+\Delta x)\in U(x_0)$，函数 $y=f(x)$ 相应地有改变量 Δy。如果存在着这样的一个常数 A，使得

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0)$$

则称 $A\cdot\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**微分**，记作

$$\mathrm{d}f(x_0)\quad 或\quad \mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$$

并称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处是**可微的**。

如果函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内每一点处都可微,则称函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内可微,记作 $\mathrm{d}f(x)$或 $\mathrm{d}y$。

由定义 2-3-1 可知,Δy 与 $\mathrm{d}y$ 之间的关系为

$$\Delta y = \mathrm{d}y + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$$

$A \cdot \Delta x$ 通常称为 Δy 的**线性主要部分**,简称**线性主部**。“线性”是因为 $A \cdot \Delta x$ 是 Δx 的一次函数;“主要”是因为另一项 $o(\Delta x)$是比 Δx 更高阶的无穷小量,在等式中,它几乎不起作用,而是 $A \cdot \Delta x$ 在式中起作用。因此,当$|\Delta x|$很小时,经常用微分 $\mathrm{d}y$ 来近似代替 Δy,即

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y \quad (\Delta x \to 0)$$

例 2-3-2　求函数 $y=x^3$ 在 x 点的微分。

解

$$\begin{aligned}\Delta y &= (x+\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3(\Delta x)^2 x + (\Delta x)^3 \\ &= 3x^2\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)\end{aligned}$$

所以,函数 $y=x^3$ 在 x 点可微,且其微分为 $\mathrm{d}y=3x^2\Delta x$。

结合导数与微分的定义我们可得定理 2-3-1。

定理 2-3-1　函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导$\Leftrightarrow$函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可微。

证明　(1) $\Rightarrow$。若函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导,则

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

根据无穷小与极限之间的关系可得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha \quad (\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0)$$

将上式两边同乘以 Δx,得

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x \quad (\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0)$$

又由于$\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\alpha\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\alpha=0$,因此 $\alpha\Delta x=o(\Delta x)$。故

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$$

根据微分的定义可知,函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可微。

(2) $\Leftarrow$。若函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可微,则

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$$

将上式两边同除以 $\Delta x(\Delta x \neq 0)$,得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

将上式两边同时取极限,得

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A + 0 = A$$

根据导数的定义可知,函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导。证毕。

定理 2-3-1 告诉我们,对于一元函数来说,可导与可微是两个等价的概念,且 $A=f'(x)$。因此,函数 $y=f(x)$在点 x 处的微分可以写作

$$dy = A\Delta x = f'(x)\Delta x$$

其次，由于自变量 x 的微分为 $dx=(x)'\Delta x=\Delta x$，即 $dx=\Delta x$，因此，函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的微分又记作

$$dy = f'(x)dx$$

将上式两边同除以 $dx(dx\neq 0)$，得

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

这就是说，函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 可以看成函数的微分 dy 与自变量微分 dx 的商，故导数也称为**微商**。

例 2-3-3 设 $y=2x^2+x+1$，当 $x=2,\Delta x=0.01$ 时，求 dy 与 Δy。

解

$$dy=(2x^2+x+1)'dx=(4x+1)dx$$

$$dy\big|_{x=2}=9dx=9\Delta x=9\times 0.01=0.09$$

$$\Delta y=[2\times(2.01)^2+2.01+1]-(2\times 2^2+2+1)=0.0902$$

2.3.2 微分的几何意义

为了对微分有较为直观的理解，下面说明微分的几何意义。

如图 2-3-2 所示，设曲线方程为 $y=f(x)$，过曲线 $y=f(x)$ 上一点 $P(x,y)$，作切线 PT，且设 PT 的倾斜角为 α，则

$$k = \tan\alpha = f'(x)$$

当自变量 x 有增量 Δx 时，对应曲线上一点 $Q(x+\Delta x,y+\Delta y)$，则

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = QM, \quad PM = \Delta x$$

$$MN = \tan\alpha \cdot PM = f'(x)\Delta x = dy$$

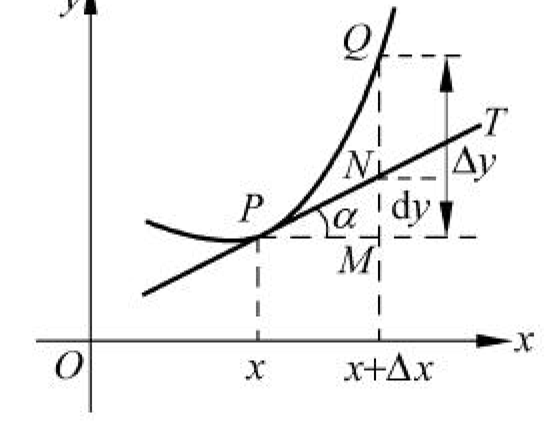


图 2-3-2

因此，函数的微分 $dy=f'(x)\Delta x$ 几何上表示当自变量 x 有增量 Δx 时，曲线 $y=f(x)$ 在对应点 $P(x,y)$ 处的切线的纵坐标的改变量。用 dy 近似代替 Δy 就是用点 P 处的切线纵坐标的增量 NM 近似代替曲线 $y=f(x)$ 的纵坐标的增量 QM，并且

$$|\Delta y - dy| = QM - NM = QN$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，它是比 Δx 高阶的无穷小量。

2.3.3 微分的计算

因为函数 $y=f(x)$ 的微分 $dy=f'(x)dx$，所以根据导数的运算法则与公式，可推得相应的微分的运算法则与公式。

1. 微分四则运算法则

设函数 $u(x),v(x)$ 都可微，则

(1) $d(u\pm v)=du\pm dv$　　(2) $d(uv)=vdu+udv$

(3) $d(Cu)=Cdu$

(4) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$ $(v(x)\neq 0)$

2. 基本微分公式

(1) $dC=0$ （C 为常数）

(2) $d(x^a)=ax^{a-1}dx$

(3) $d(a^x)=a^x\ln a dx$

(4) $d(e^x)=e^x dx$

(5) $d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx$

(6) $d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$

(7) $d(\sin x)=\cos x dx$

(8) $d(\cos x)=-\sin x dx$

(9) $d(\tan x)=\sec^2 x dx$

(10) $d(\cot x)=-\csc^2 x dx$

(11) $d(\sec x)=\sec x\cdot\tan x dx$

(12) $d(\csc x)=-\csc x\cdot\cot x dx$

(13) $d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(14) $d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(15) $d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$

(16) $d(\text{arccot}\, x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$

例 2-3-4 求 $y=\sin x+\ln x+x^2$ 的微分。

解

$$\begin{aligned} dy &= d(\sin x+\ln x+x^2) \\ &= d(\sin x)+d(\ln x)+d(x^2) \\ &= \cos x dx+\frac{1}{x}dx+2x dx \\ &= \left(\cos x+\frac{1}{x}+2x\right)dx \end{aligned}$$

例 2-3-5 求 $y=e^x\sin x$ 的微分。

解

$$\begin{aligned} dy &= d(e^x\sin x) = \sin x de^x + e^x d(\sin x) \\ &= \sin x e^x dx + e^x\cos x dx \\ &= e^x(\sin x+\cos x)dx \end{aligned}$$

例 2-3-6 求 $y=x^2e^x\cos x$ 的微分。

解

$$\begin{aligned} dy &= d(x^2e^x\cos x) = (e^x\cos x)d(x^2)+x^2d(e^x\cos x) \\ &= e^x\cos x d(x^2)+x^2\cos x d(e^x)+x^2e^x d(\cos x) \\ &= e^x\cos x(2x)dx+x^2\cos x e^x dx+x^2e^x(-\sin x)dx \\ &= (2xe^x\cos x+x^2e^x\cos x-x^2e^x\sin x)dx \end{aligned}$$

3. 一阶微分形式的不变性

设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$都是可微函数，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的微分为

$$dy = f'(u)\cdot\varphi'(x)dx$$

由于 $du=\varphi'(x)dx$，所以，复合函数 $y=f(\varphi(x))$的微分公式也可以写作

$$dy = f'(u)du$$

由此可见，无论 u 是自变量还是中间量，函数 $y=f(u)$的微分 dy 总可以用 $f'(u)du$ 来表示，这一性质称为微分形式不变性。

例 2-3-7 求 $y=\sin(2x+1)$的微分。

解 解法 1：把 $2x+1$ 看成中间变量 u，即 $u=2x+1$，则

$$\begin{aligned}dy &= d(\sin u) = \cos u du = \cos(2x+1)d(2x+1)\\ &= \cos(2x+1)\cdot 2dx\\ &= 2\cos(2x+1)dx\end{aligned}$$

解法 2：因为 $$\frac{dy}{dx}=y'=2\cos(2x+1)$$

所以 $$dy = y'dx = 2\cos(2x+1)dx$$

考虑到函数 $y=f(x)$的导数 $f'(x)$可以看成函数的微分 dy 与自变量微分 dx 的商，因为在微分运算中不必分辨是自变量还是中间变量，所以可用微分来计算隐函数的导数，有时比较简单。

例 2-3-8 对由方程 $e^y=xy$ 所确定的隐函数，求$\frac{dy}{dx}$与 dy。

解 对等式两边取微分，得

$$d(e^y) = d(xy)$$

即 $$e^y dy = ydx + xdy$$

分别合并 dy 与 dx 前面的系数，有

$$(e^y - x)dy = ydx$$

得 $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{e^y - x}$$

$$dy = \frac{y}{e^y - x}dx$$

2.3.4 微分的应用

1. 近似计算

由微分的定义可知，当 $\Delta x\to 0$ 时，

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

略去高阶无穷小 $o(\Delta x)$便得到

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

即 $$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \tag{2-3-1}$$

记 $x=x_0+\Delta x$，即 $\Delta x=x-x_0$，则式 2-3-1 可写作

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{2-3-2}$$

例 2-3-9 求 $\sqrt{9.006}$的近似值。

解 设 $f(x)=\sqrt{x}$。取 $x=9.006$，$x_0=9$，由公式 $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，有

$$f(9.006) \approx f(9) + f'(9)(9.006 - 9)$$

由 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$得 $f'(9)=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}$。又由于 $f(9)=\sqrt{9}=3$，因此，

$$\sqrt{9.006} \approx 3 + \frac{1}{6}(9.006 - 9) = 3.001$$

例 2-3-10　求 $\sin 31°$的近似值。

解　设 $f(x)=\sin x$，取 $x_0=30°=\frac{\pi}{6}$，$\Delta x=1°=\frac{\pi}{180}$。

由 $f'(x)=\cos x$ 得 $f'(x_0)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，且 $f(x_0)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$。

由公式 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ 可得

$$\begin{aligned}\sin 31° &\approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180} \approx 0.5151\end{aligned}$$

***2. 误差分析**

在实际工作中，常常需要计算一些由公式 $y=f(x)$所确定的量。由于各种原因，我们所得到的数据 x 往往带有误差（称为直接误差），而根据这些带有误差的数据 x 计算出来的 y 也会有误差（称为间接误差）。下面讨论怎样利用微分来对间接误差进行估计。

设某一个量的真实数值（下面简称真值）为 A，它的近似值为 a，则$|A-a|$为 a 的**绝对误差**，称$\frac{|A-a|}{|a|}$为 a 的**相对误差**。一般来说，在实际问题中所涉及的量，它的真值虽然存在，但往往找不到，所以绝对误差与相对误差也就无法求得。因此，我们可以从实际出发规定出绝对误差的上界 δ_A（称为绝对误差限，下面简称绝对误差）及相对误差的上界$\frac{\delta_A}{a}$（称为相对误差限，下面简称相对误差）。这样一来，当我们根据直接测量值 x 按公式 $y=f(x)$计算 y 值时，如果已知 x 的绝对误差上限为δ_x，即

$$|\Delta x| \leqslant \delta_x$$

则当 $y'\neq 0$ 时，y 的误差

$$|\Delta y| \approx |\mathrm{d}y| \approx |y'||\Delta x| \leqslant |y'|\cdot\delta_x$$

即 y 的绝对误差为

$$\delta_y = |y'|\cdot\delta_x \tag{2-3-3}$$

而 y 的相对误差为

$$\frac{\delta_y}{|y|} = \left|\frac{y'}{y}\right|\cdot\delta_x \tag{2-3-4}$$

例 2-3-11　测量球半径 r，其相对误差为何值时，才能保证球的体积由公式 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 计算后相对误差不超过 3%。

解　由式 2-3-4 可得

$$\frac{\delta_V}{|V|} = \left|\frac{V'}{V}\right|\cdot\delta_r = \left|\frac{4\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi r^3}\right|\cdot\delta_r = 3\frac{\delta_r}{|r|}$$

由此可见，要使$\frac{\delta_V}{|V|}\leqslant 3\%$，就要求

$$\frac{\delta_r}{|r|}\leqslant\frac{1}{3}\times 3\% = 1\%$$

习题 2-3

1. 设 $y=x^3$，当 $x=1,\Delta x=0.01$ 时，求 $\mathrm{d}y$ 与 Δy。

2. 求下列各函数的微分。

(1) $y=x^3\ln x+\mathrm{e}^x\sin x$　　(2) $y=\mathrm{e}^{\arcsin\sqrt{x}}$

(3) $y=\arcsin\frac{1}{x}$　　(4) $y=x^{5x}$

(5) $y=\frac{1}{x}+2\sqrt{x}$　　(6) $y=x\sin 2x$

(7) $y=x^2\mathrm{e}^{2x}$　　(8) $y=\mathrm{e}^{-x}\cos(3-x)$

3. 将适当的函数填入下列括号内，使等式成立。

(1) $\mathrm{d}(\quad)=2\mathrm{d}x$　　(2) $\mathrm{d}(\quad)=3x\mathrm{d}x$

(3) $\mathrm{d}(\quad)=\cos t\mathrm{d}t$　　(4) $\mathrm{d}(\quad)=\sin 2t\mathrm{d}t$

(5) $\mathrm{d}(\quad)=\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$　　(6) $\mathrm{d}(\quad)=\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$

(7) $\mathrm{d}(\quad)=\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　(8) $\mathrm{d}(\quad)=\sec^2 3x\mathrm{d}x$

4. 求$\sqrt{2}$的近似值。

2.4　中值定理

前面我们从分析变化率的问题出发，引入了导数的概念，并讨论了导数的求法。本节中，我们将应用导数来研究函数及曲线的某些性态，并利用这些知识解决一些实际问题。为此，先要介绍微分学的几个中值定理，它们是一元微分学的基础。

2.4.1　罗尔(Rolle)定理

如果函数 $f(x)$满足：

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；

(2) 在开区间(a,b)内可导；

(3) 在区间两个端点的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$，

则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=0\qquad(a<\xi<b)$$

证明　由于函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，由闭区间上连续函数的性质可知，函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上一定有最小值 m 与最大值 M。

下面分两种情况讨论。

(1) 如果 $m=M$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上恒等于常数 m，于是在 (a,b) 内的任意点 x，有 $f'(x)=0$，即 (a,b) 内任意一点都可取作 ξ，使得 $f'(\xi)=0$。

(2) 如果 $m<M$，由 $f(a)=f(b)$ 可知，$f(a)$ 与 $f(b)$ 不可能同时一个是最大值一个是最小值，因此 m 和 M 中至少有一个不是区间 $[a,b]$ 的端点的函数值。不妨设 $M\neq f(a)$，并设 ξ 为 (a,b) 内的一点，使得 $f(\xi)=M$。

由于函数 $f(x)$ 在点 ξ 处达到最大值，所以只要 $(\xi+\Delta x)\in(a,b)$，便有

$$f(\xi+\Delta x)\leqslant f(\xi)$$

即

$$f(\xi+\Delta x)-f(\xi)\leqslant 0$$

当 $\Delta x>0$ 时，有

$$\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\leqslant 0$$

当 $\Delta x<0$ 时，有

$$\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\geqslant 0$$

因为 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，而 $\xi\in(a,b)$，所以 $f(x)$ 在点 ξ 处可导，即

$$f'(\xi)=f'_-(\xi)=f'_+(\xi)$$

又

$$f'(\xi)=f'_-(\xi)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\geqslant 0$$

$$f'(\xi)=f'_+(\xi)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\leqslant 0$$

于是必有

$$f'(\xi)=0$$

证毕。

罗尔定理的几何意义是：如果一条连续、光滑的曲线 $y=f(x)$ 在两个端点处的纵坐标相等，那么在这条曲线上至少能找到一点，使曲线在该点处的切线平行于 x 轴，如图 2-4-1 所示。

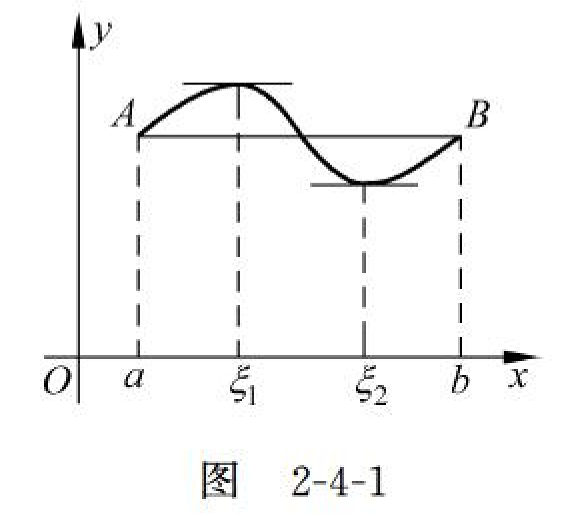
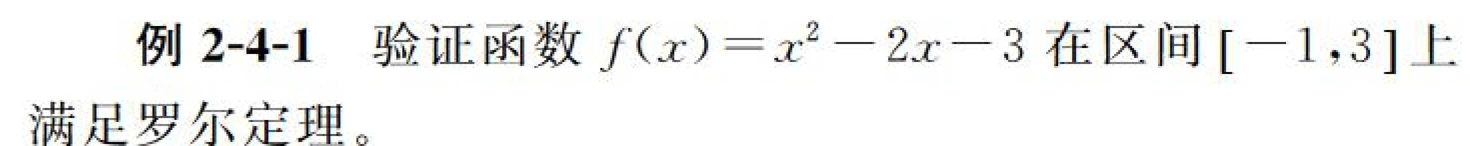


图　2-4-1


例 2-4-1　验证函数 $f(x)=x^2-2x-3$ 在区间 $[-1,3]$ 上满足罗尔定理。

解　因为 $f(x)=x^2-2x-3$ 是初等函数，所以 $f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上连续。由于 $f'(x)=2x-2$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-1,3)$ 内可导。又由于 $f(-1)=f(3)=0$，所以函数 $f(x)$ 满足罗尔定理的 3 个条件。令 $f'(x)=2x-2=0$，可得 $\xi=1\in(-1,3)$，使得

$$f'(\xi)=0$$

例 2-4-2　不用求出函数的导数，判定函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ 的导数方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的范围。

解　由于 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的可导函数，且

$$f(1)=f(2)=f(3)=0$$

故 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 和 $[2,3]$ 上均满足罗尔定理的 3 个条件。因此，在区间 $(1,2)$ 上至少存在一点 ξ_1，使 $f'(\xi_1)=0$，即 $x=\xi_1$ 是导数方程 $f'(x)=0$ 的一个实根。在区间 $(2,3)$ 上至少存在一点 ξ_2，使 $f'(\xi_2)=0$，即 $x=\xi_2$ 是导数方程 $f'(x)=0$ 的一个实根。又因为 $f'(x)=0$ 是二次方程，因此它只有两个实根，分别位于区间 $(1,2)$ 和 $(2,3)$ 内。

2.4.2 拉格朗日中值定理

如果函数 $f(x)$满足:

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续;

(2) 在开区间(a,b)内可导,

则在区间(a,b)内至少存在一点 ξ,使

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

或

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

证明 作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

则

$$\varphi(a)=\varphi(b)=0$$

并且 $\varphi(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导。由罗尔定理可知,在(a,b)内至少存在一点 ξ,使

$$\varphi'(\xi)=0$$

即

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

故有

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

即

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

证毕。

拉格朗日中值定理的几何意义是:如果一条连续、光滑的曲线 $y=f(x)$的两个端点分别为 $A(a,f(a))$和 $B(b,f(b))$,那么在这条曲线上至少能找到一点,使曲线在该点处的切线平行于直线 AB,如图 2-4-2 所示。

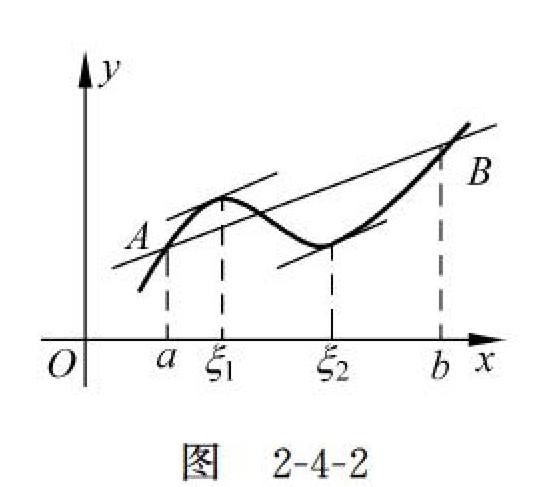


图 2-4-2

定理中的公式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)\quad(a<\xi<b)$$

称为**拉格朗日中值公式**。这个公式还可以写成其他形式。

设 $a=x,b=x+\Delta x$,于是上述公式可以写作

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\cdot\Delta x\quad(\xi\text{介于}x\text{与}x+\Delta x\text{之间})\tag{2-4-1}$$

因为对于介于 x 与 $x+\Delta x$ 之间的 ξ,一定有这样一个值 $\theta(0<\theta<1)$,使 $\xi=x+\theta\Delta x$ $\left(\text{只要取}\ \theta=\frac{\xi-x}{\Delta x}\text{即可}\right)$,所以公式又可以写成下面的形式:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x\quad(0<\theta<1)\tag{2-4-2}$$

拉格朗日中值定理是微分学的基本定理,它建立了函数在区间上的增量与函数在该区间内某点处导数之间的联系,从而使我们有可能利用导数去研究函数及曲线在区间上的某些形态。对于点 ξ,定理只肯定了它的存在,在应用定理时,只须知道有这样的点存

在就够了。

例 2-4-3 证明不等式

$$|\sin b-\sin a|\leqslant|b-a|$$

证明 设 $f(x)=\sin x$ 在区间 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，因此有

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

即

$$\sin b-\sin a=\cos\xi\cdot(b-a)\quad(\xi\text{ 在 }a\text{ 与 }b\text{ 之间})$$

所以

$$|\sin b-\sin a|=|\cos\xi||b-a|\leqslant|b-a|$$

证毕。

直接应用拉格朗日中值定理，可以得到下面两个推论。

推论 2-4-1 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点处的导数都是零，即 $f'(x)=0(a<x<b)$，那么函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内为一常数，即 $f(x)=C$(C 为常数)。

证明 在区间 (a,b) 内任取两点 x_1,x_2，设 $x_1<x_2$。因为函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，所以 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续，因此 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，并且在 (x_1,x_2) 内可导。

根据拉格朗日中值定理，在 (x_1,x_2) 内至少存在一点 ξ，使

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)\cdot(x_2-x_1)$$

已知 $f'(\xi)=0$，所以 $f(x_2)-f(x_1)=0$，即

$$f(x_2)=f(x_1)$$

由于 x_1,x_2 是任意的，因此 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内函数值总是相等的，这表明 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内恒为一个常数，即 $f(x)=C(a<x<b)$。证毕。

推论 2-4-2 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点处的导数都相等，即有 $f'(x)\equiv g'(x)$，那么这两个函数在 (a,b) 内最多相差一个常数，即 $f(x)=g(x)+C$。

证明 令 $h(x)=f(x)-g(x)$，则 $h'(x)=[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)=0$。根据推论 2-4-1 可知函数 $h(x)=C(a<x<b)$。即

$$f(x)=g(x)+C\quad(a<x<b)$$

这就证明了函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 (a,b) 内最多相差一个常数。证毕。

例 2-4-4 求证 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}(-1\leqslant x\leqslant 1)$。

证明 设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$，当 $-1<x<1$ 时有

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\equiv 0$$

由推论 2-4-1，$f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内为一常数 C，即

$$\arcsin x+\arccos x=C$$

下面确定常数 C 的值，不妨取 $x=0\in(-1,1)$，得

$$C=f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=0+\frac{\pi}{2}$$

所以当 $-1<x<1$ 时，有

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

对于 $x=\pm 1$ 时，等式显然成立。证毕。

*2.4.3 柯西(Cauchy)中值定理

如果函数 $f(x)$和 $g(x)$满足下列条件：

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；

(2) 在开区间(a,b)内可导；

(3) 在(a,b)内每一点处均有 $g'(x)\neq 0$，

则在(a,b)内至少存在一点 ξ,使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

本节只给出柯西中值定理的内容,证明从略。

在柯西中值定理中,若取 $g(x)=x$,则有 $g(b)-g(a)=b-a$,$g'(x)=1$,即得拉格朗日中值定理 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。可见柯西中值定理是拉格朗日中值定理的推广。

习题 2-4

1. 验证函数 $f(x)=x^3-x$ 在区间$[-1,1]$上满足罗尔定理。

2. 不用求出函数的导数,判定函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$的导数方程 $f'(x)=0$ 有几个实根,并指出它们所在的区间。

3. 证明：当 $x>0$ 时,$\ln(1+x)<x$。

4. 验证函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$[1,2]$上是否满足拉格朗日中值定理的条件。若满足，求适合定理的 ξ 值。

*5. 对于函数 $f(x)=x^3$ 及 $g(x)=x^2+1$,在闭区间$[1,2]$上验证柯西中值定理的正确性。

2.5 洛必达法则

在计算极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$时,若 $f(x)$,$g(x)$都趋于零或趋于无穷大,则称此极限为未定式,并分别称为$\dfrac{0}{0}$与$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式。例如,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$是$\dfrac{0}{0}$型；$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$是$\dfrac{\infty}{\infty}$型。通过第 1 章的学习我们知道,未定式的极限可能存在,也可能不存在。本节讨论这种类型的极限，并给出一个行之有效的计算方法：洛必达法则。

2.5.1 $\dfrac{0}{0}$型未定式

定理 2-5-1(洛必达法则Ⅰ) 设函数 $f(x)$和 $g(x)$在点 x_0 的某去心邻域内有定义，且满足下列条件：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$；

(2) $f'(x)$和$g'(x)$都存在，且$g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$为有限数或$\infty$），

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或 }\infty)$$

***证明**　由于$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，而极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$与函数$f(x)$及$g(x)$在点$x_0$处是否有定义无关，所以可重新定义$f(x_0)=0$，$g(x_0)=0$，则有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),\quad \lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$$

即$f(x)$及$g(x)$在点x_0处连续。

设x是x_0的某邻域内的一点，由于$f(x)$和$g(x)$在邻域内处处可导，所以在以x_0及x为端点的闭区间上它们一定是连续的；在以x_0及x为端点的开区间上它们是可导的。应用柯西中值定理的条件，于是至少存在一点ξ，使

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-0}{g(x)-0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\quad(\xi\text{介于 }x_0\text{ 及 }x\text{ 之间})$$

令$x\to x_0$，并对上式两端求极限，注意$x\to x_0$时，$\xi\to x_0$，得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=A$$

即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

证毕。

注：对于当$x\to\infty$时的$\dfrac{0}{0}$型未定式，只要作一个简单的变换$t=\dfrac{1}{x}$，就可得当$x\to\infty$时$t\to 0$。于是便可以使用洛必达法则Ⅰ。但是当我们计算$x\to\infty$这一函数的极限时，不必再进行变换，只要像洛必达法则Ⅰ那样直接对未定式的分子分母求导即可。

例 2-5-1　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$。

解　由于　$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}x=0$。

因此这是一个$\dfrac{0}{0}$型未定式，由洛必达法则Ⅰ，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

例 2-5-2　求极限$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2-4x+4}$。

解　这是一个$\dfrac{0}{0}$型未定式，由洛必达法则Ⅰ，得

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-6x}{2x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{6x-6}{2}=3$$

有时需要多次应用洛必达法则Ⅰ才能求出极限。

例 2-5-3 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$。

解 这是一个$\dfrac{0}{0}$型未定式，由洛必达法则Ⅰ，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$$

例 2-5-4 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-2x^3}{x^3}$。

解 这是一个$\dfrac{0}{0}$型未定式，由洛必达法则Ⅰ，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-2x^3}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2e^{x^3}-6x^2}{3x^2}=\lim_{x\to 0}(e^{x^3}-2)=-1$$

例 2-5-5 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}(a>0,b>0)$。

解 这是一个$\dfrac{0}{0}$型未定式，由洛必达法则Ⅰ，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-b^x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a-b^x\ln b}{1}=\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}$$

例 2-5-6 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$。

解 这是一个$\dfrac{0}{0}$型未定式，由洛必达法则Ⅰ，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$$

例 2-5-7 求极限 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$。

解 这是一个$\dfrac{0}{0}$型未定式，由洛必达法则Ⅰ，得

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$$

从以上例子可以看出，洛必达法则确实是求未定式的一种有效的方法。但未定式种类很多，只使用一种方法并不一定能完全奏效，最好与其他求极限的方法结合起来使用。例如，能化简时应尽可能化简；可利用等价无穷小替代或重要极限时，则尽可能应用，这样可使运算过程简化。

例 2-5-8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}$。

解 显然，直接利用洛必达法则，在对分母求导时比较麻烦，这时如果作一个等价无穷小替代，那么运算就方便得多，其运算如下：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

2.5.2 $\frac{\infty}{\infty}$型未定式

定理 2-5-2(洛必达法则Ⅱ)　设函数 $f(x)$和 $g(x)$在点 x_0 的某去心邻域内有定义,且满足下列条件:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$;

(2) $f'(x)$和 $g'(x)$都存在,且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$($A$ 为有限数或∞),

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或 }\infty)$$

证明　略。

与定理 2-5-1 类似,对于当 $x\to\infty$时的$\frac{\infty}{\infty}$型未定式也可以使用洛必达法则Ⅱ。

注:定理中的条件对于结论来讲是充分的,即若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为$\infty$),则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}$存在(或为$\infty$),而当 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在(且不为$\infty$)时,则未必 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}$不存在。这时洛必达法则失效,改用其他方法求极限。

例 2-5-9　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}$。

解　由于　$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$,　$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

这是一个$\frac{\infty}{\infty}$型未定式,由洛必达法则Ⅱ,得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

例 2-5-10　求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cot x}{\frac{1}{x}}$。

解　这是一个$\frac{\infty}{\infty}$型未定式,由洛必达法测Ⅱ,得

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cot x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\tan x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sec^2 x}=\lim_{x\to 0^+}\cos^2 x=1$$

例 2-5-11　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x+1}$。

解　这是一个$\frac{\infty}{\infty}$型未定式,由洛必达法则Ⅱ,得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

例 2-5-12 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$。

解
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

本例虽属$\dfrac{\infty}{\infty}$型，且满足洛必达法则Ⅱ的条件(1)、(2)，但

$$\frac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\frac{1+\cos x}{1}=1+\cos x$$

由于$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$不存在，这时洛必达法则失效，应改用其他方法求极限。

2.5.3 其他待定型

未定式还有以下 5 种：$0\cdot\infty$，1^{∞}，0^0，∞^0，$\infty-\infty$。这 5 种未定式总可通过适当变换将它们转换为$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型的未定式，然后再应用洛必达法则。

1. $0\cdot\infty$型转换为$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型

具体方法是通过代数恒等式变形。例如：

$$0\cdot\infty=\frac{0}{\dfrac{1}{\infty}}=\frac{0}{0}\quad\text{或}\quad 0\cdot\infty=\frac{\infty}{\dfrac{1}{0}}=\frac{\infty}{\infty}$$

究竟把$0\cdot\infty$型化为$\dfrac{0}{0}$型还是$\dfrac{\infty}{\infty}$型要视具体问题而定。

例 2-5-13 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$。

解 这是一个$0\cdot\infty$型未定式，故可通过变形将其转换为$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式：

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

例 2-5-14 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$。

解 这是一个$0\cdot\infty$未定式，故可通过变形将其转换为$\dfrac{0}{0}$型未定式：

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$$

2. $\infty-\infty$一般可转换为$\dfrac{0}{0}$型

具体方法如下：

$$\infty-\infty=\frac{1}{\frac{1}{\infty}}-\frac{1}{\frac{1}{\infty}}=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}\cdot\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0}$$

在实际计算中，有时可不必采用上述步骤，只须经过通分就可转换为$\frac{0}{0}$型。

例 2-5-15　求极限 $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$。

解　这是$\infty-\infty$未定式，通过"通分"将其转换为$\frac{0}{0}$型未定式：

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}$$

例 2-5-16　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$。

解　这是$\infty-\infty$未定式，通过"通分"将其转换为$\frac{0}{0}$型未定式。

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{x-e^x+1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-e^x}{2}=-\frac{1}{2}$$

3. 1^∞、0^0、∞^0 型未定式的转换

由于 1^∞、0^0、∞^0 型未定式都是来源于幂指函数 $[f(x)]^{g(x)}$ 的极限，因此通常可以用取对数的方法或利用

$$[f(x)]^{g(x)}=e^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=e^{g(x)\ln[f(x)]}$$

将其转换为 $0\cdot\infty$型未定式，再转换为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型。

例 2-5-17　求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$。

解　这是 1^∞型未定式。

$$\lim_{x\to0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}$$

又由于
$$\lim_{x\to0^+}\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\tan x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

所以
$$\lim_{x\to0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

例 2-5-18　求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}(\tan x)^{\sin x}$。

解　这是 0^0 型未定式。

$$\lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}e^{\sin x\cdot\ln(\tan x)}$$

又由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\cdot\ln(\tan x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan x}{\dfrac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{\tan x\cos^2 x}}{-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\sin x}{\cos^2 x}=0$

所以 $$\lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}e^{\sin x\cdot\ln(\tan x)}=e^0=1$$

例 2-5-19 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$。

解 这是∞^0型未定式。

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}$$

又由于 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^0=1$$

例 2-5-20 求$\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$。

解 令 $y=x^{\sin x}$，则 $\ln y=(\sin x)\ln x$。

又因为 $$\lim_{x\to 0}(\sin x)\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}\tan x=0$$

所以 $$\lim_{x\to 0}y=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)\ln x}=e^0=1$$

注：使用洛必达法则时，应注意以下几点。

(1) 每次使用法则前，必须检验是否属于$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式，若不是，就不能使用该法则；

(2) 如果有可约因子，或有非零极限值的乘积因子，则可先约去或提出，以简化演算步骤；

(3) 当 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$不存在时(不包括∞的情况)，并不能断定 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$也不存在，这时洛必达法则失效，改用其他方法求极限。

习题 2-5

1. 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{3^x-1}$

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\sin^2 x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 5x}{\ln\tan 3x}$　　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^a}(a>0)$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}$　　(8) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)(a\neq 0)$　　(10) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-2}\mathrm{e}^x$

(11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$　　(12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$

(13) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$　　(14) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$

2. 验证极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$存在，但不能用洛必达法则得出。

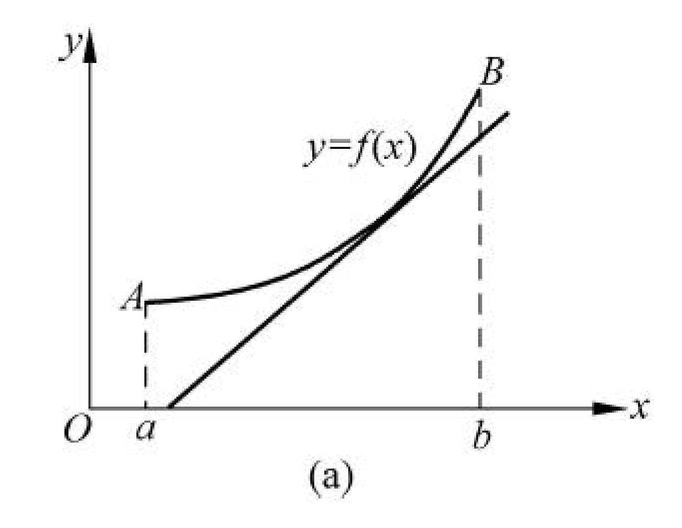
2.6　函数单调性与极值

本节利用导数研究函数的单调性、极值性、凹凸性、拐点等，最后用定性方法作出函数的图形。通过极值与最值的求出可解决一些应用问题，从中可以体会到微分法对于函数性质的研究十分重要。

2.6.1　函数的单调性

在第1章中，我们已经给出了函数在区间上单调的定义。用定义判断函数的单调性是比较困难的，下面以中值定理为依据，利用导数来研究函数的单调性。

如果函数 $y=f(x)$在(a,b)上单调递增，那么它的图形是一条沿 x 轴正向上升的曲线，这时曲线上各点处的切线斜率是正的，亦即 $f'(x)>0$(图 2-6-1(a))；反之，如果函数 $y=f(x)$在(a,b)上单调递减，那么它的图形是一条沿 x 轴正向下降的曲线，其上各点处的切线斜率是负的，亦即 $f'(x)<0$(图 2-6-1(b))。



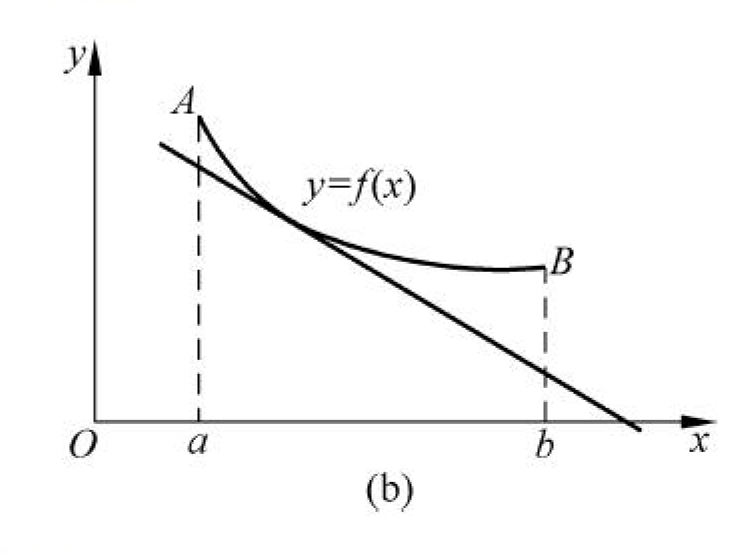


图　2-6-1

由此可见，可导函数的单调性与导数的符号有着密切的联系。反过来，能否用导数的符号来判定函数的单调性呢？

定理 2-6-1(函数单调性的充分条件)　设函数 $f(x)$在区间(a,b)内可导，且导函数

$f'(x)$不变号。

(1) 若 $f'(x)>0$，则 $f(x)$在区间(a,b)内是单调递增的；

(2) 若 $f'(x)<0$，则 $f(x)$在区间(a,b)内是单调递减的。

证明 在(a,b)内任取 x_1,x_2，不妨设 $x_1<x_2$，由于函数 $f(x)$在区间(a,b)内可导，因而它在闭区间$[x_1,x_2]$上连续，在开区间(x_1,x_2)内可导。根据拉格朗日中值定理有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\quad(x_1<\xi<x_2)$$

(1) 已知 $f'(x)>0$，所以 $f'(\xi)>0$。而 $x_2-x_1>0$，则有

$$f(x_2)-f(x_1)>0$$

即

$$f(x_2)>f(x_1)$$

由于 x_1,x_2 是任意的，因此，函数 $f(x)$在(a,b)内是单调递增的。

同理可证(2)。证毕。

注：若将定理中的开区间换成闭区间或无穷区间，定理的结论仍然成立。

需要指出的是，这个定理只是判定函数单调性的充分条件，而不是必要条件。当函数 $f(x)$的导数 $f'(x)$在区间(a,b)内，除了在个别点处为零外，均有 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$），则函数 $f(x)$在这个区间内仍然是单调递增（或单调递减）的。例如，在区间$(-\infty,+\infty)$内，函数 $f(x)=x^3$ 的导数 $f'(x)=3x^2$ 在 $x=0$ 处为零，除此之外，都有 $f'(x)>0$，因而函数 $f(x)=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内仍是单调递增的。

例 2-6-1 讨论函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x-1$ 的单调性。

解 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$。

$$f'(x)=\mathrm{e}^x-1$$

令 $f'(x)=0$，解得

$$x=0$$

当 $x\in(-\infty,0]$时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$在$(-\infty,0]$上单调递减；

当 $x\in[0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增。

例 2-6-2 讨论函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性。

解 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$。

$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

在$(-\infty,+\infty)$内，函数的导数没有等于零的点。易见，当 $x=0$ 时，函数的导数不存在。

当 $x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$在$(-\infty,0]$上单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增。由此可见，导数不存在的点也可能是函数增减区间的分界点。

求函数 $f(x)$的单调区间的步骤如下。

(1) 确定函数 $f(x)$的定义域。

(2) 求出函数 $f(x)$的导数 $f'(x)$。

(3) 求出函数在其定义域内 $f'(x)=0$ 的点和导数不存在的点，这些点把定义域分成

若干子区间。

(4) 确定 $f'(x)$在每个子区间内的符号，根据每个子区间内 $f'(x)$的符号，确定 $f(x)$的单调性。

在解题过程，一般采用列表方式进行讨论。

例 2-6-3　讨论 $f(x)=x^3-6x^2+9x+3$ 的单调性。

解　函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$。

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=3$。它们把定义域$(-\infty,+\infty)$分成三个区间，见表 2-6-1。

表　2-6-1

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

由表 2-6-1 可知，函数 $f(x)$在区间$(-\infty,1)$和$(3,+\infty)$上单调递增，而在区间$(1,3)$上单调递减。

利用函数的单调性还可以证明一些不等式。

例 2-6-4　证明当 $x>0$ 时，有不等式 $\ln(1+x)>\dfrac{x}{1+x}$。

证明　设 $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$，只要证 $f(x)>0(x>0)$即可。

由于

$$f'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$$

当 $x>0$ 时，有 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$单调递增。又 $f(0)=0$，于是，当 $x>0$ 时，有

$$f(x)>f(0)=0$$

因此，当 $x>0$ 时，有

$$\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}>0$$

即

$$\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$$

2.6.2　函数的极值

定义 2-6-1　设函数 $y=f(x)$在 $U(x_0)$内有定义，如果对于任意的 $x\in U(\bar{x}_0)$都有

(1) $f(x)<f(x_0)$，则称 $f(x_0)$是函数 $f(x)$的一个**极大值**；

(2) $f(x)>f(x_0)$，则称 $f(x_0)$是函数 $f(x)$的一个**极小值**。

函数的极大值与极小值统称为函数的**极值**，使函数取得极值的点 $x=x_0$ 称为**极值**

点。例如,函数 $f(x)=x^2$ 在点 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)=0$,则点 $x=0$ 就是函数 $f(x)=x^2$ 的极小值点。

注:由于极值只与函数在一点某个邻域内的函数值有关,因此函数的极值是函数的一个局部属性。即如果 $f(x_0)$是函数的一个极大值,那只是就 x_0 点附近的一个局部范围来讲的,它是局部范围的最大和最小;而最大值和最小值是整体性的概念,是指 $f(x)$在整个定义域上的最大值和最小值。如图 2-6-2 所示,$f(x_1)$是极大值,$f(x_2)$是极小值;就整个区间$[a,b]$来说,$f(b)$是最大值,$f(x_2)$是最小值。

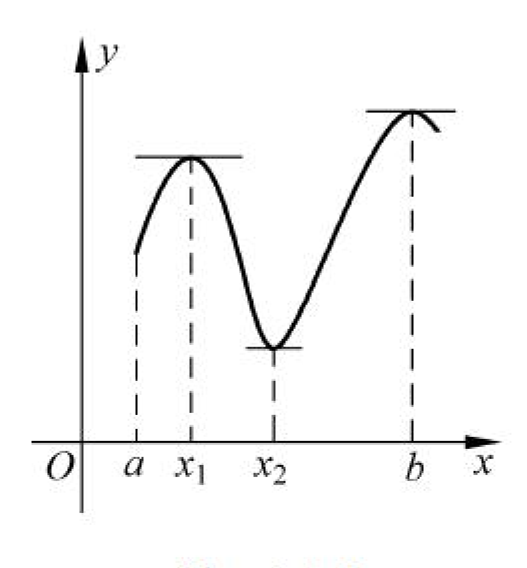


图 2-6-2

下面讨论函数取得极值的必要条件和充分条件。

定理 2-6-2(函数取得极值的必要条件) 设函数 $f(x)$在点 x_0 处可导,并且在点 x_0 处 $f(x)$取得极值,则它在该点的导数$f'(x_0)=0$。

定理 2-6-2 的证明从略。这个定理又称为费马定理。

它的几何意义是,当一条连续光滑的曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处取得极值时,它在该点的切线一定平行于 x 轴。把使导数 $f'(x)=0$ 的点称为函数 $f(x)$的**驻点**(或称为**稳定点**)。

费马定理说明:可导函数 $f(x)$的极值点必定是它的驻点。应该注意的是,费马定理的逆定理是不成立的,即驻点不一定是极值点。

例如,函数 $f(x)=x^3$ 的导数为 $f'(x)=3x^2$,令 $f'(x)=0$,解得 $x=0$,即 $x=0$ 是函数 $f(x)=x^3$ 的驻点;但 $x=0$ 却不是函数 $f(x)=x^3$ 的极值点。所以,函数的驻点只是可能的极值点。

另外,函数在它的导数不存在的点处也可能取得极值。例如,函数 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处不可导,但函数在该点取得极小值。

那么,怎样判定函数在驻点或不可导的点处究竟是否取得极值?如果是,究竟取得极大值还是极小值?下面给出两个判定极值的充分条件。

定理 2-6-3(函数取得极值的第一充分条件) 设函数 $y=f(x)$在 $\mathring{U}(x_0)$内可导,且 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 点连续。

(1) 当 $x\in U^-(\bar{x}_0)$时 $f'(x)>0$,且 $x\in U^+(\bar{x}_0)$时 $f'(x)<0$,则函数 $f(x)$在 x_0 处取得极大值;

(2) 当 $x\in U^-(\bar{x}_0)$时 $f'(x)<0$,且 $x\in U^+(\bar{x}_0)$时 $f'(x)>0$,则函数 $f(x)$在 x_0 处取得极小值;

(3) 当 x 在 x_0 的左、右两侧时,恒有 $f'(x)>0$ 或恒有 $f'(x)<0$,则函数 $f(x)$在 x_0 处没有极值。

定理 2-6-3 证明从略,如图 2-6-3 所示。

求函数 $f(x)$的极值点和相应极值的步骤如下。

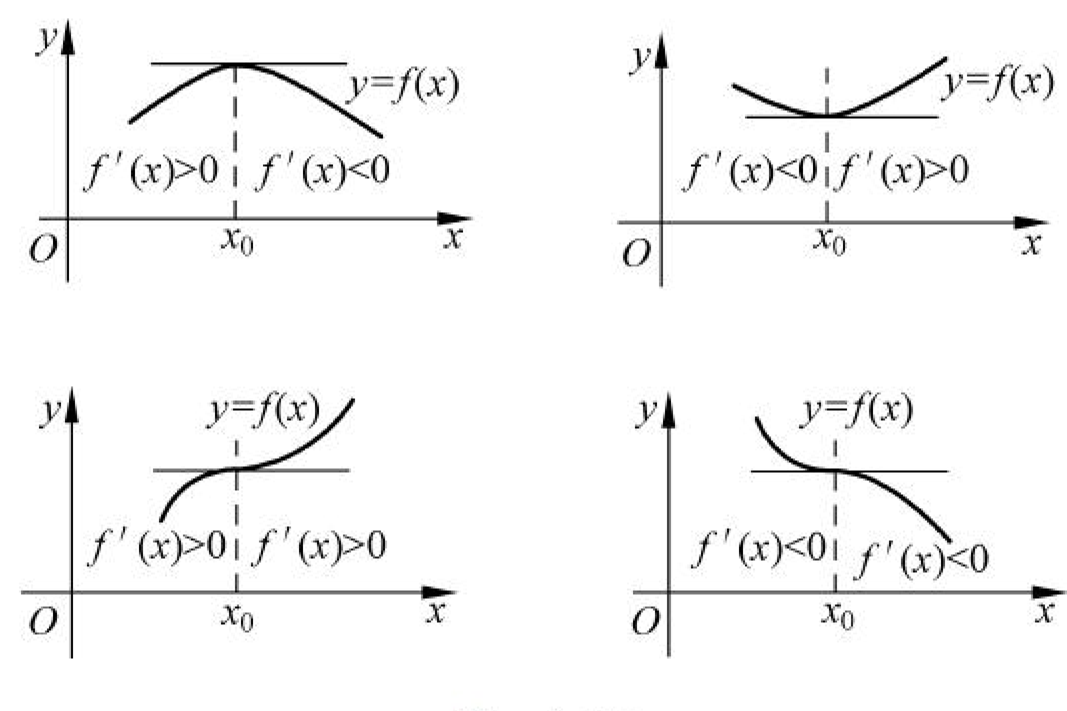


图　2-6-3

(1) 确定函数 $f(x)$的定义域。

(2) 求出函数 $f(x)$的导数 $f'(x)$。

(3) 解方程 $f'(x)=0$,求出 $f(x)$在定义域内的所有驻点。

(4) 找出 $f(x)$在定义域内的所有导数不存在的点。

(5) 讨论 $f'(x)$在每个驻点或不可导点的左、右两侧附近符号变化情况,以确定该点是否为极值点,进一步确定是极大值还是极小值。

在解题过程,一般采用列表方式进行讨论。

例 2-6-5　求函数 $f(x)=x^3-6x^2+9x+3$ 的极值。

解　函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$。

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

令 $f'(x)=0$,得驻点 $x_1=1,x_2=3$。它们把定义域$(-\infty,+\infty)$分成 3 个区间,见表 2-6-2。

表　2-6-2

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值 7	↘	极小值 3	↗

由表 2-6-2 可知,在 $x_1=1$ 处,函数 $f(x)$有极大值 $f(1)=7$;在 $x_2=3$ 处,函数 $f(x)$有极小值 $f(3)=3$。

例 2-6-6　求函数 $f(x)=2x+3\sqrt[3]{x^2}$的极值。

解　函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$。

$$f'(x)=2+2x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}$$

令 $f'(x)=0$,得驻点,$x_1=-1$。

不难看出,函数 $f(x)$在点 $x_2=0$ 处不可导但连续。

此两点均为极值的可能点,它们把定义域$(-\infty,+\infty)$分成 3 个区间,见表 2-6-3。

表 2-6-3

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	↗	极大值 1	↘	极小值 0	↗

由表 2-6-3 可知，在 $x_1=-1$ 处，函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-1)=1$；在 $x_2=0$ 处，函数 $f(x)$ 有极小值 $f(0)=0$。

当函数 $f(x)$ 在驻点处的二阶导数存在且不为零时，还可以用定理 2-6-4 来判定函数 $f(x)$ 的极值。

定理 2-6-4（函数取得极值的第二充分条件） 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，则

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值；

(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值。

证明 (1) $f''(x_0)<0$ 即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0$$

由极限不等式的性质可知，在 $U(x_0)$ 内有

$$\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0 \quad (x\neq x_0)$$

又由于 $f'(x_0)=0$，所以

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}<0 \quad (x\neq x_0)$$

由此可见，当 $x\in U^-(\bar{x}_0)$ 时 $f'(x)>0$，而当 $x\in U^+(\bar{x}_0)$ 时 $f'(x)<0$。根据函数取得极值的第一充分条件可知，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值。

同理可证(2)。证毕。

注：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$。如果 $f''(x_0)=0$，那么函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可能有极值，也可能没有极值。

例如，函数 $f(x)=x^3$，有 $f'(0)=f''(0)=0$，但 $f(x)=x^3$ 在 $x=0$ 处没有极值；而函数 $f(x)=x^4$，有 $f'(0)=f''(0)=0$，但 $f(x)=x^4$ 在 $x=0$ 处取得极小值。

因此，如果函数在驻点处的二阶导数为零，那么还得用一阶导数在驻点左、右邻近的符号来判定。

例 2-6-7 求函数 $f(x)=x^2+\dfrac{54}{x}$ 的极值。

解 函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$。

$$f'(x)=2x-\frac{54}{x^2}$$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $\qquad x_1=3$

又 $\qquad f''(x)=2+\dfrac{108}{x^3}$

则
$$f''(3)=6>0$$

根据函数取得极值的第二充分条件可知，函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(3)=27$。

例 2-6-8　求函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 的极值。

解　函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

令 $f'(x)=0$，得驻点
$$x_1=0,\quad x_2=2$$

又
$$f''(x)=6x-6$$

则
$$f''(0)=-6<0,\quad f''(2)=6>0$$

故函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(0)=1$，极小值为 $f(2)=-3$。

***例 2-6-9**　试问 a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值？它是极大值还是极小值？求此极值。

解　函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

$$f'(x)=a\cos x+\cos 3x$$

由假设知 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$，从而有 $\frac{a}{2}-1=0$，即 $a=2$。

又当 $a=2$ 时，$f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x$，且

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}<0$$

故函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极大值，且极大值 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$。

2.6.3　函数的最大值与最小值

在工农业生产、工程技术及科学实验中，常常会遇到这样一类问题：在一定条件下，怎样使“产品最多”“用料最省”“成本最低”“效率最高”等。这类问题在数学上有时可归结为求某一函数(通常称为目标函数)的最大值或最小值问题。

极值是一个局部概念，是与极值点邻近的所有点的函数值相比而言的；而最大值、最小值是一个整体概念，是函数在整个区间上全部数值中的最大者、最小者。

在第 1 章中，我们曾指出，闭区间上的连续函数一定存在最大值和最小值。一般来说，如果函数在开区间内取得最值，那么这个最值一定也是函数的一个极值。连续函数取得极值的点只可能是该函数的驻点或不可导点，而函数的最值也可能在区间端点上取得。

求函数最值的步骤如下。

(1) 求函数的一阶导数，确定函数在指定区间内的驻点和不可导点。

(2) 求出所给区间上所有驻点、不可导点及边界点的函数值，并进行比较。

(3) 上述驻点、不可导点及边界点的函数值中最大者为最大值，最小者为最小值。

例 2-6-10　求函数 $f(x)=2x^3-3x^2$ 在区间 $[-1,4]$ 上的最大值与最小值。

解
$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=0,\quad x_2=1$

因为 $f(0)=0,\quad f(1)=-1,\quad f(-1)=-5,\quad f(4)=80$

所以，函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,4]$ 上最大值 $f(4)=80$，最小值 $f(-1)=-5$。

例 2-6-11 求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 在区间 $[0,4]$ 上的最大值与最小值。

解 $$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

令 $f'(x)=0$，得 $f(x)$ 在区间 $[0,4]$ 的驻点

$$x_1=3 \quad (x_2=-1 \text{ 不在区间内，舍去})$$

因为 $f(3)=-22,\quad f(0)=5,\quad f(4)=-15$

所以，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,4]$ 上的最大值是 $f(0)=5$，最小值是 $f(3)=-22$。

***例 2-6-12** 求函数 $f(x)=|x^2-3x+2|$ 在 $[-3,4]$ 上的最大值与最小值。

解 由于 $$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & x\in[-3,1]\cup[2,4] \\ -x^2+3x-2 & x\in(1,2) \end{cases}$$

所以 $$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & x\in(-3,1)\cup(2,4) \\ -2x+3 & x\in(1,2) \end{cases}$$

求得 $f(x)$ 在 $(-3,4)$ 内的驻点为 $x=\dfrac{3}{2}$，不可导点为 $x_1=1, x_2=2$。

而 $$f(-3)=20,\quad f(1)=0,\quad f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4},\quad f(2)=0,\quad f(4)=6$$

所以，函数 $f(x)$ 在区间 $[-3,4]$ 上的最大值是 $f(-3)=20$，最小值是 $f(1)=f(2)=0$。

需要指出的是，对于某些实际问题，往往根据问题的特点，就可以断定可导函数 $f(x)$ 在其区间内部确有最大值（或最小值）。而当 $f(x)$ 在其区间内部又只有一个驻点 x_0 时，那么，不必讨论 $f(x_0)$ 是不是极值，立即就可断定 $f(x_0)$ 是最大值（或最小值）。

例 2-6-13 设有一块边长为 a 的正方形铁皮，从 4 个角截去同样大小的正方形小方块，做成一个无盖的方盒子，小方块的边长为多少才能使盒子容积最大？

解 设小块的边长为 x，则方盒的底边长为 $a-2x$，它的容积为

$$V(x)=x(a-2x)^2,\quad x\in\left(0,\frac{a}{2}\right)$$

$$V'(x)=(a-2x)^2-4x(a-2x)=(a-2x)(a-6x)$$

令 $V'(x)=0$，得区间 $\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$ 内唯一驻点：

$$x=\frac{a}{6}$$

另一方面，根据问题的特点可以判断 $V(x)$ 一定有最大值，因此当 $x=\dfrac{a}{6}$ 时，$V(x)$ 取得最大值 $\dfrac{2a^3}{27}$。

例 2-6-14 某快餐厅的快餐每月的需求量为 x 份，它与每份价格 p 元的函数关系为 $p=\dfrac{60000-x}{2000}$，生产 x 份快餐的成本为 $C(x)=50000+5.6x$（元）。试求取得最大利润时

的销售量。

解　销售 x 份快餐的收益为

$$R(x) = px = \frac{(60000 - x)x}{2000} = 30x - \frac{x^2}{2000}$$

销售 x 份快餐的利润为

$$L(x) = R(x) - C(x) = 30x - \frac{x^2}{2000} - (50000 + 5.6x)$$

$$= 24.4x - \frac{x^2}{2000} - 50000 \quad (0 < x \leqslant 60000)$$

又

$$L'(x) = 24.4 - \frac{x}{1000}$$

令 $L'(x)=0$，得唯一驻点

$$x = 24400$$

当 $x=24400$ 时 $L''(x)<0$，所以，当销售量为 24400 份时，可获得最大利润为

$$L(24400) = 247680(\text{元})$$

习题 2-6

1. 讨论函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调性。

2. 讨论函数 $f(x)=\arctan x-x$ 的单调性。

3. 证明：当 $x>1$ 时，$2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$。

4. 求下列函数的极值。

(1) $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$　　(2) $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$

(3) $f(x)=(x^2-2)^2+1$　　(4) $f(x)=(x^2-1)^3+1$

(5) $f(x)=x-\ln(1+x)$　　(6) $f(x)=x+\tan x$

5. 求下列各函数在指定区间上的最大值与最小值。

(1) 函数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+14$ 在$[-3,4]$上；

(2) 函数 $f(x)=x-x\sqrt{x}$ 在区间$[0,4]$上。

6. 某车间要靠墙壁盖一间长方形小屋，现有存砖只够砌 20m 长的墙壁，问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大？

7. 某厂生产某产品，固定成本为 20000 元，每生产一单位产品，成本增加 100 元。已知总收益 R 是年产量 x 的函数

$$R = R(x) = \begin{cases} 400x - \dfrac{x^2}{2} & 0 < x \leqslant 400 \\ 80000 & x > 400 \end{cases}$$

问每年生产多少单位产品时，总利润最大？此时总利润是多少？

8. 如图 2-6-4 所示，已知 $AB=100\text{km}$，$AC=20\text{km}$，公路 CD 与铁路 DB 的运费比为 $5:3$，为使 CDB 总运费最省，如何选择 D 点？

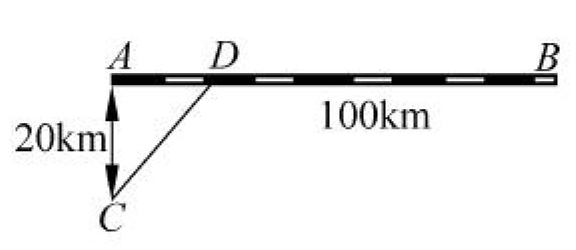


图　2-6-4

2.7 曲线的凹凸性与函数的图像

为了进一步研究函数的特性并正确地作出函数的图形,需要研究曲线的弯曲方向。在几何上,曲线的弯曲方向是用曲线的凹凸性来描述的。

2.7.1 曲线的凹凸性

定义 2-7-1 如果曲线弧位于它每一点的切线的上方,则称此曲线弧是凹的;如果曲线弧位于它每一点的切线的下方,则称此曲线弧是凸的,如图 2-7-1 所示。

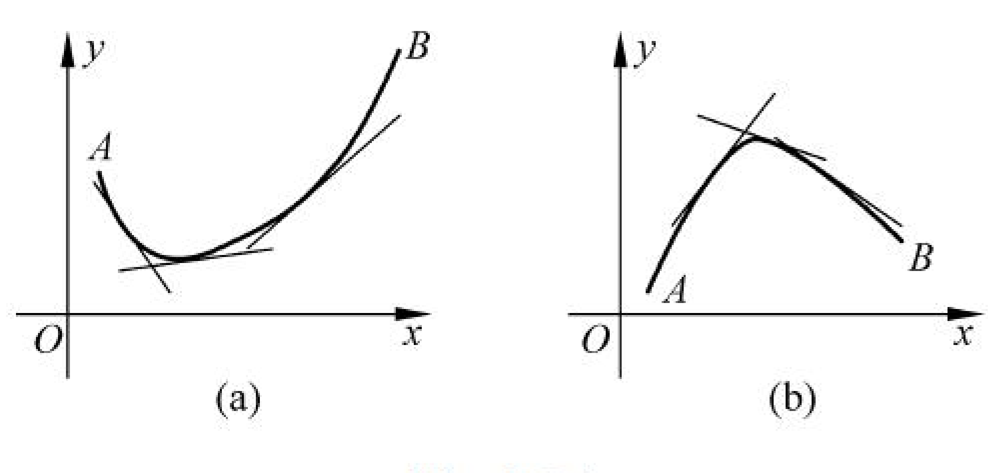


图 2-7-1

从图 2-7-1 还可以看到如下事实:对于凹的曲线弧,其切线的斜率 $f'(x)$随着 x 的增大而增大,即 $f'(x)$单调递增;对于凸的曲线弧,其切线的斜率 $f'(x)$随着 x 的增大而减小,即 $f'(x)$单调递减。而函数 $f'(x)$的单调性又可用它的导数,即 $f(x)$的二阶导数 $f''(x)$的符号来判定,故曲线弧 $y=f(x)$的凹凸性与 $f''(x)$的符号有关。下面给出曲线凹凸性的判别方法。

定理 2-7-1(曲线凹凸性的判别法) 设函数 $f(x)$在区间(a,b)上具有二阶导数 $f''(x)$,则在该区间上,

(1) 当 $f''(x)>0$ 时,曲线弧 $y=f(x)$是凹的;

(2) 当 $f''(x)<0$ 时,曲线弧 $y=f(x)$是凸的。

例 2-7-1 判定曲线 $y=\ln x$ 的凹凸性。

解 函数的定义域为$(0,+\infty)$。由于

$$y'=\frac{1}{x},\quad y''=-\frac{1}{x^2}<0$$

因此曲线 $y=\ln x$ 在$(0,+\infty)$内是凸的。

例 2-7-2 讨论曲线 $y=x^3$ 的凹凸区间。

解 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,由于

$$y'=3x^2,\quad y''=6x$$

显然,当 $x\in(-\infty,0)$时,$y''<0$;当 $x\in(0,+\infty)$时,$y''>0$。

因此,当 $x\in(-\infty,0)$时,曲线弧是凸的;当 $x\in(0,+\infty)$时,曲线弧是凹的。

例 2-7-3 讨论曲线 $y=3x^2-x^3$ 的凹凸区间。

解 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$。由于

$$y' = 6x - 3x^2, \quad y'' = 6 - 6x = 6(1-x)$$

显然，当 $x \in (-\infty, 1)$ 时，$y'' > 0$；当 $x \in (1, +\infty)$ 时，$y'' < 0$。

因此，当 $x \in (-\infty, 1)$ 时，曲线弧是凹的；当 $x \in (1, +\infty)$ 时，曲线弧是凸的。

2.7.2 曲线的拐点

定义 2-7-2 连续曲线的凹弧与凸弧的分界点，称为曲线的**拐点**。

例如，函数 $y = x^3$，当 $x \in (-\infty, 0)$ 时，曲线弧是凸的；当 $x \in (0, +\infty)$ 时，曲线弧是凹的。所以(0,0)点是它的拐点。一般来说，函数 $y = f(x)$ 的二阶导数为零或不存在的点可能是拐点。那如何判别曲线的拐点呢？下面给出曲线拐点的判别法。

定理 2-7-2(拐点的判别法) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 上具有二阶连续导数 $f''(x)$。若 x_0 是 (a,b) 内一点，

(1) 当 $f''(x)$ 在 x_0 附近的左边和右边不同号时，点 $(x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的一个拐点；

(2) 当 $f''(x)$ 在 x_0 附近的左边和右边同号时，点 $(x_0, f(x_0))$ 不是 $y = f(x)$ 的一个拐点。

由定理 2-7-2 可知求拐点的步骤如下。

(1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域。

(2) 求出函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$。

(3) 解方程 $f''(x) = 0$，求出该方程在定义域内的所有实根。

(4) 找出 $f(x)$ 在定义域内的所有二阶导数 $f''(x)$ 不存在的点 x_0。

(5) 考察 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧邻近的符号。若 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧邻近的符号相反，则点 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点；若 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧邻近的符号相同，则点 $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点。

例 2-7-4 求曲线 $y = x^{\frac{5}{3}}$ 的拐点。

解 (1) 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$。

(2) $y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$，$y'' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$。

(3) 该函数没有二阶导数为零的点。

(4) 二阶导数不存在的点为 $x = 0$。

(5) 点 $x = 0$ 把定义域 $(-\infty, +\infty)$ 分成两个区间，见表 2-7-1。

表 2-7-1

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	凸的	拐点	凹的

由表 2-7-1 可知，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是凹的；在区间 $(-\infty,0)$ 上是凸的；曲线 $y=x^{\frac{5}{3}}$ 的拐点为 $(0,0)$。

例 2-7-5 求函数 $f(x)=x^4-4x^3+2x-5$ 的凹凸区间及拐点。

解 (1) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

(2) $f'(x)=4x^3-12x^2+2$，$f''(x)=12x^2-24x=12x(x-2)$。

(3) 令 $f''(x)=0$，得 $x_1=0$，$x_2=2$。

(4) 该函数没有二阶导数不存在的点。

(5) 这两点把定义域 $(-\infty,+\infty)$ 分成 3 个区间，见表 2-7-2。

表 2-7-2

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	凹的	拐点	凸的	拐点	凹的

由表 2-7-2 可知，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 与 $(2,+\infty)$ 上是凹的；在区间 $(0,2)$ 上是凸的；曲线 $f(x)$ 的拐点为 $(0,-5)$ 和 $(2,-17)$。

2.7.3 曲线的渐近线

定义 2-7-3 如果点 M 沿曲线 $y=f(x)$ 离坐标原点无限远移时，M 与某一条直线 L 的距离趋近于零，则称直线 L 为曲线 $y=f(x)$ 的一条**渐近线**，并且，

(1) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=B$，则称直线 $y=A$ 或 $y=B$ 为曲线 $y=f(x)$ 的**水平渐近线**；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$，则称直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的**铅直渐近线**。

例 2-7-6 求曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的渐近线。

解 因为
$$\lim_{x\to-3}\frac{x^3}{x^2+2x-3}=\infty,\quad \lim_{x\to1}\frac{x^3}{x^2+2x-3}=\infty$$
所以，直线 $x=-3$，$x=1$ 是曲线的两条铅直渐近线。

例 2-7-7 求曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的渐近线。

解 因为
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=0$$
所以，直线 $y=0$ 是曲线的水平渐近线。

例 2-7-8 求曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 的渐近线。

解 因为
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=0,\quad \lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty$$

所以，直线 $y=0$ 是曲线的水平渐近线，直线 $x=1$ 是曲线的铅直渐近线。

2.7.4 函数的作图

利用导数描绘函数图形的一般步骤如下。

(1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域，及函数所具有的某些特性(如奇偶性、周期性等)，并求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$。

(2) 求出一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点，并求出函数 $f(x)$ 的间断点及 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点，用这些点把函数的定义域分成几个区间。

(3) 列表讨论函数图形的单调性、凹凸性、极值和拐点。

(4) 找出渐近线，确定图形的变化趋势。

(5) 算出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的零点以及不存在的点所对应的函数值，找出图形上相应的点。再适当选取一些辅助点，一般常选取曲线和坐标轴的交点。然后综合上述讨论的结果画出函数 $y=f(x)$ 的图形。

在作图时，要具体情况具体分析，不一定对上述各点都讨论。

例 2-7-9 作函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 的图形。

解 (1) 所给函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

$$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$$
$$f''(x)=6x-2$$

(2) $f'(x)=0$ 的根为 $x_1=-\frac{1}{3}$，$x_2=1$。$f''(x)=0$ 的根为 $x_3=\frac{1}{3}$。这些点将 $(-\infty,+\infty)$ 分成 4 个区间：$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]$、$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$、$\left[\frac{1}{3},1\right]$、$[1,+\infty)$。

(3) 列表分析(表 2-7-3)。

表 2-7-3

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$	↗	极大	↓	拐点	↘	极小	↑

其中，记号↗表示曲线弧上升且是凸的，↓表示曲线弧下降且是凸的，↑表示曲线弧上升且是凹的，↘表示曲线弧下降且是凹的。

(4) 当 $x\to+\infty$ 时，$y\to+\infty$；当 $x\to-\infty$ 时，$y\to-\infty$。

(5) 计算出 $x=-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1$ 处的函数值：

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{27},\quad f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{27},\quad f(1)=0$$

从而得到函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 图形上的 3 个点：

$$\left(-\frac{1}{3},\frac{32}{27}\right),\quad \left(\frac{1}{3},\frac{16}{27}\right),\quad (1,0)$$

适当补充一些点，例如，计算出

$$f(-1)=0,\quad f(0)=1,\quad f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{8}$$

利用上面的结果，作出函数的图形，如图 2-7-2 所示。

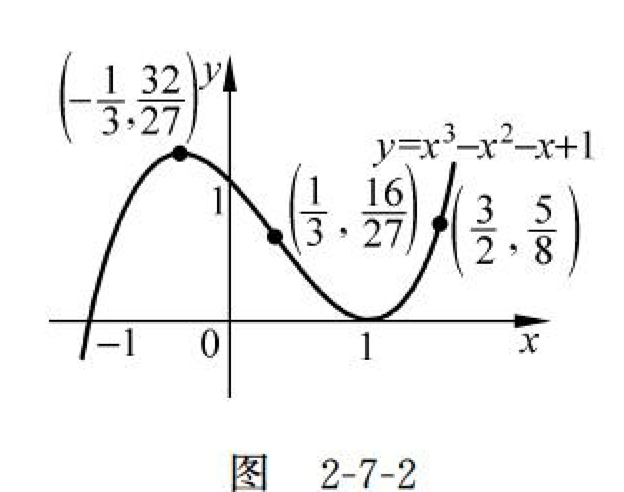


图 2-7-2

习题 2-7

1. 判断下列曲线的凹凸性。

(1) $y=x^4+1$　　(2) $y=3x-x^2$

(3) $y=x+\frac{1}{x}(x>0)$　　(4) $y=x\arctan x$

2. 求下列各函数图形的凹凸区间与拐点。

(1) $y=2x^3+3x^2-12x+14$　　(2) $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$

(3) $y=xe^{-x}$　　(4) $y=\ln(1+x^2)$

(5) $y=(x+1)^6+e^x$　　(6) $y=e^{\arctan x}$

3. 问 a,b 为何值时，点(1,4)为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？

4. 作函数 $y=1+\frac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形。

2.8 导数在经济学中的应用

本节介绍导数在经济学中的两个应用——边际分析和弹性分析。

2.8.1 边际与边际分析

边际是经济学中的一个重要概念，一般指经济函数的变化率。利用导数研究经济变量的边际变化的方法，称作边际分析法。

1. 边际成本

边际成本的经济含义是：当产量为 q 时，再生产一个单位产品所增加的成本。

设某产品产量为 q 时所需的总成本为 $C=C(q)$。由于

$$C(q+\Delta q)-C(q)=\Delta C(q)\approx dC(q)=C'(q)\Delta q=C'(q)$$

所以，边际成本就是总成本函数关于产量 q 的导数。

2. 边际收入

边际收入的经济含义是：多销售一个单位产品所增加的销售收入。

设某产品的销售量为 q 时的收入函数为 $R=R(q)$，则收入函数关于销售量 q 的导数就是该产品的边际收入。

3. 边际利润

设某产品的销售量为 q 时的利润函数为 $L=L(q)$，当 $L(q)$ 可导时，称 $L'(q)$ 为销售量为 q 时的边际利润，它近似等于销售量为 q 时，再多销售一个单位产品所增加(或减少)的利润。

由于利润函数为收入函数与总成本函数之差，即

$$L(q)=R(q)-C(q)$$

由导数的运算法则可知

$$L'(q)=R'(q)-C'(q)$$

即边际利润为边际收入与边际成本之差。

例 2-8-1 一企业某产品的日生产能力为 500 台，每日产品的总成本 C(单位：元)是日产量 q(单位：台)的函数：

$$C(q)=400+2q+5\sqrt{q} \quad q\in[0,500]$$

求：(1) 当产量为 400 台时的总成本；

(2) 当产量为 400 台时的平均成本；

(3) 当产量从 400 台增加到 484 台时总成本的平均变化率；

(4) 当产量为 400 台时的边际成本。

解 (1) 当产量为 400 台时，总成本为

$$C(400)=400+2\times 400+5\sqrt{400}=1300(\text{元})$$

(2) 当产量为 400 台时，平均成本为

$$\frac{C(400)}{400}=\frac{1300}{400}=3.25(\text{元/台})$$

(3) 当产量从 400 台增加到 484 台时总成本的平均变化率为

$$\frac{\Delta C}{\Delta q}=\frac{C(484)-C(400)}{484-400}=\frac{1478-1300}{84}\approx 2.119(\text{元/台})$$

(4) 当产量为 400 台时的边际成本为

$$C'(q)=(400+2q+5\sqrt{q})'=2+\frac{5}{2\sqrt{q}}$$

$$C'(400)=2+\frac{5}{2\sqrt{400}}=2.125(\text{元/台})$$

这个结论的经济含义是：当产量为 400 台时，再多生产一台所增加的成本为 2.125 元。

例 2-8-2 设某产品的需求函数为 $q=100-5p$(p 指价格)。求边际收入函数，以及 $q=20,50,70$ 时的边际收入。

解 收入函数为 $R(q)=pq$，式中的销售价格 p 需要从需求函数中反解出来，即 $p=\frac{1}{5}(100-q)$。于是收入函数为

$$R(q)=\frac{1}{5}(100-q)q=20q-\frac{1}{5}q^2$$

边际收入函数为

$$R'(q) = 20 - \frac{2}{5}q$$

所以，当 $q=20,50,70$ 时的边际收入分别为

$$R'(20) = 20 - \frac{2}{5} \times 20 = 12$$

$$R'(50) = 20 - \frac{2}{5} \times 50 = 0$$

$$R'(70) = 20 - \frac{2}{5} \times 70 = -8$$

2.8.2 弹性分析

弹性分析也是经济分析中常用的一种方法，主要用于对生产、供给、需求等问题的研究。

在经济活动分析中，有时需要比较两个经济变量的变化幅度所产生的变化效果。例如，变量 x 在 $x=100$ 的基础上增加 1，变量 y 在 $y=1000$ 的基础上增加 1，虽然 x 和 y 都是增加 1，但其经济意义是不一样的。为此引进绝对改变量和相对改变量的概念。

若变量 x 在某一点处取得改变量 Δx，则称 Δx 称为 x 的**绝对改变量**，$\frac{\Delta x}{x}$为 x 的**相对改变量**。由此可知，导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$是 y 与 x 的绝对改变量的比值$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限。

在经济数学中，称 y 与 x 的相对改变量的比值$\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$的极限为 y 对 x 的弹性。

定义 2-8-1 对于函数 $y=f(x)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$$

存在，则

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y}f'(x)$$

称作函数 $f(x)$在点 x 处的**弹性**（或相对变化率），记作 E，即

$$E = \frac{x}{y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

从定义可以看出，函数 $f(x)$在点 x 处的弹性是函数的相对改变量与自变量相对改变量比值$\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$的极限，它是函数的相对变化率，或解释成当自变量变化 1%时，函数变化的百分数。

设需求函数 $Q=Q(p)$，这里 p 表示产品的价格。于是，可具体定义该产品在价格为 p 时的**需求弹性**为

$$E_{\mathrm{d}} = \frac{p}{Q} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p} = \frac{p}{Q} \cdot Q'(p)$$

根据经济理论，需求函数是减函数，即需求量随价格的提高而减少，故需求弹性一

般是负值，它反映产品需求量对价格变动反应的强烈程度(灵敏度)。即需求弹性 E_d 表示：在价格为 p 时，若价格增加(或减少)1%，则需求量减少(或增加)$|E_d|$%。

利用供给函数 $S=S(p)$，同样定义**供给弹性**为

$$E_s=\frac{p}{S}\cdot\frac{dS}{dp}=\frac{p}{S}\cdot S'(p)$$

例 2-8-3　设某商品的需求函数为

$$Q=3000e^{-0.02p}$$

求价格为 100 时的需求弹性，并解释其经济含义。

解　因为

$$Q'=-60e^{-0.02p}$$

所以 $$E_d=\frac{p}{Q}\cdot Q'(p)=\frac{p}{3000e^{-0.02p}}\cdot(-60e^{-0.02p})=-0.02p$$

且 $$E_d(100)=-0.02\times 100=-2$$

它的经济含义是：在价格为 100 时，若价格增加 1%，则需求量减少 2%。

在市场经济中，企业经营者关心的是商品涨价($\Delta p>0$)或降价($\Delta p<0$)对总收入的影响程度。利用需求弹性概念可以知道涨价未必增收，降价未必减收。

因为 $$E_d=\frac{p}{Q}\cdot\frac{dQ}{dp}$$

则 $$p\,dQ=E_d\cdot Q\,dp$$

当商品价格 p 有微小变化($|\Delta p|$非常小)时，商品销售收入 $R=p\cdot Q$ 的改变量为

$$\begin{aligned}\Delta R&=\Delta(pQ)\approx d(pQ)=Q\,dp+p\,dQ\\&=Q\,dp+E_d\cdot Q\,dp\\&=(1+E_d)Q\,dp\end{aligned}$$

即 $$\Delta R\approx(1-|E_d|)Q\,dp\approx(1-|E_d|)Q\Delta p$$

可以得出以下结果。

(1) 当$|E_d|>1$ 时，商品涨价($\Delta p>0$)，将使商品销售总收入减少($\Delta R<0$)；商品降价($\Delta p<0$)，将使商品销售总收入增加($\Delta R>0$)。

(2) 当$|E_d|<1$ 时，商品涨价($\Delta p>0$)，将使商品销售总收入增加($\Delta R>0$)；商品降价($\Delta p<0$)，将使商品销售总收入减少($\Delta R<0$)。

(3) 当$|E_d|=1$ 时，商品涨价或降价对商品销售总收入基本没有影响。

例 2-8-4　已知某公司生产经营的某种电器的需求弹性在 1.5～3.5 之间，如果该公司计划在下一年度内将价格降低 10%，试问：(1)这种电器的销售量将会增加多少？(2)总收入将会增加多少？

解　因为需求弹性为

$$E_d=\frac{p}{Q}\cdot\frac{dQ}{dp}\approx\frac{p}{Q}\cdot\frac{\Delta Q}{\Delta p}$$

得 $$\frac{\Delta Q}{Q}=\frac{\Delta p}{p}\cdot E_d$$

又由 $\Delta R\approx(1-|E_d|)Q\Delta p$ 和 $R=pQ$，得

$$\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{(1-|E_d|)Q\Delta p}{pQ} = (1-|E_d|) \cdot \frac{\Delta p}{p}$$

又已知
$$\frac{\Delta p}{p} = -10\% = -0.1$$

因此，当 $|E_d|=1.5$ 时，

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta p}{p} \cdot E_d = (-0.1)\times(-1.5)\times 100\% = 0.15\times 100\% = 15\%$$

$$\frac{\Delta R}{R} \approx (1-|E_d|) \cdot \frac{\Delta p}{p} = (1-1.5)\times(-0.1)\times 100\% = 0.05\times 100\% = 5\%$$

当 $|E_d|=3.5$ 时，

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta p}{p} \cdot E_d = (-0.1)\times(-3.5)\times 100\% = 0.35\times 100\% = 35\%$$

$$\frac{\Delta R}{R} \approx (1-|E_d|) \cdot \frac{\Delta p}{p} = (1-3.5)\times(-0.1)\times 100\% = 0.25\times 100\% = 25\%$$

即在下一年度内将价格降低 10%后，(1)该公司这种电器的销售量将会增加 15%～35%；(2)总收入将会增加 5%～25%。

习题 2-8

1. 设生产某种产品 x 个单位时的成本函数为 $C(x)=0.25x^2+6x+100$(万元)，求：

(1) 当 $x=10$ 时的总成本、平均成本和边际成本；

(2) 当产量 x 为多少时，平均成本最小？

2. 某厂每天生产某种产品 q 件的成本函数为 $C(q)=0.5q^2+36q+9800$(元)。为使平均成本最低，每天产量应为多少？此时，每件产品平均成本为多少？

3. 某商户以每条 10 元的价格购进一批牛仔裤，设此牛仔裤的需求函数为

$$Q = 40 - p$$

问该商户将售价 p 定为多少时才能获得最大利润？最大利润是多少？

4. 某厂生产某种产品 q 件时的总成本函数为 $C(q)=0.01q^2+4q+20$(元)，单位销售价格为 $p=14-0.01q$(元/件)，问产量为多少时可使利润达到最大？最大利润是多少？

5. 设某商品的需求函数为

$$Q = 12 - \frac{p}{2}$$

(1) 求需求弹性函数；

(2) 求 $p=6$ 时的需求弹性，并解释其经济含义。

*2.9 曲率

前面已介绍了曲线的弯曲方向有两种：凹弧和凸弧。各段弧的弯曲程度也很可能不一样，曲线的这种弯曲程度在数学上用曲率来表示。曲率有实际应用性，比如在设计火车铁轨遇到弯道时，如果弯曲很厉害，离心力就很大，这样就很容易造成火车出轨。于是自

然而然就产生这么一个问题：该如何恰当地设计一个曲线弯曲程度的度量标准？于是曲率的计算公式也就应运而生了。在研究曲率之前，先介绍弧微分的概念。

2.9.1　弧微分

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有连续导数，在曲线 $y=f(x)$ 上取固定点 A 作为度量弧长的基点，并规定 x 增大方向作为曲线的正向。对曲线上任一点 $M(x,y)$，规定有向弧段 $\overset{\frown}{AM}$ 的值 s（下面简称弧 s）如下：s 的绝对值等于这段弧的长度，当有向弧段 $\overset{\frown}{AM}$ 的方向与曲线的正向一致时，$s>0$；相反时，$s<0$。显然，弧 s 与 x 存在函数关系：$s=s(x)$，而且 $s(x)$ 是 x 的单调增加函数。下面来求 $s(x)$ 的导数及微分。

现在要求弧长 $s=s(x)$ 的微分 $\mathrm{d}s$。但由于给出的是曲线方程 $y=f(x)$，而 $s=s(x)$ 是未知的，因此须寻求一种关系，使 $\mathrm{d}s$ 能由 $y=f(x)$ 或其导数来表出。

如图 2-9-1 所示，设 $x,x+\Delta x$ 为区间 (a,b) 内两个邻近的点，它们在曲线 $y=f(x)$ 上的对应点为 M,N。设对应于 x 的增量 Δx，弧 s 的增量为 Δs，那么

图　2-9-1

$$\Delta s=\overset{\frown}{AN}-\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MN}$$

因此弧长 s 关于 x 的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=s'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}$$

在直角三角形 MPN 中，

$$|MN|^2=|MP|^2+|PN|^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$$

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2=\left(\frac{\overset{\frown}{MN}}{\Delta x}\right)^2=\left(\frac{\overset{\frown}{MN}}{|MN|}\right)^2\cdot\frac{|MN|^2}{(\Delta x)^2}$$

$$=\left(\frac{\overset{\frown}{MN}}{|MN|}\right)^2\cdot\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}=\left(\frac{\overset{\frown}{MN}}{|MN|}\right)^2\cdot\left[1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\pm\sqrt{\left(\frac{\overset{\frown}{MN}}{|MN|}\right)^2\cdot\left[1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]}$$

令 $\Delta x\to 0$ 取极限，由于 $\Delta x\to 0$ 时，$N\to M$，这时弧的长度与弦的长度之比的极限等于1，即

$$\lim_{N\to M}\frac{|\overset{\frown}{MN}|}{|MN|}=1$$

又有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$$

因此得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\pm\sqrt{1+(y')^2}$$

由于 $s=s(x)$ 是单调增加函数，从而根号前应取正号，于是有

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x$$

这就是**弧微分公式**。

例 2-9-1 求曲线 $y=x^3+2x+1$ 的弧微分。

解 因为 $y'=3x^2+2$，所以

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+(3x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{9x^4+12x^2+5}\,\mathrm{d}x$$

2.9.2 曲率及其计算公式

我们直觉地认识到：直线不弯曲，半径较小的圆弯曲得比半径较大的圆厉害些，而其他曲线的不同部分有不同的弯曲程度。例如，抛物线 $y=x^2$ 在顶点附近弯曲得比远离顶点的部分厉害些。

在工程技术中，有时需要研究曲线的弯曲程度。如，船体结构中的钢梁、机床的转轴等，它们在荷载作用下要产生弯曲变形，在设计时对它们的弯曲必须有一定的限制，这就要定量地研究它们的弯曲程度。为此首先要讨论如何用数量来描述曲线的弯曲程度。

有了弧微分的概念，就可以对曲线的弯曲程度进行研究了。为了从数量上刻画曲线的弯曲程度，先从几何图形上直观地分析曲线的弯曲程度与哪些量有关。

设有两条光滑的曲线 l 与 l'，在这两条曲线上各取长度相等的弧段 $\overset{\frown}{M_1N_1}$ 和 $\overset{\frown}{M_2N_2}$。从图 2-9-2(a)、图 2-9-2(b) 中可以看出，弧段 $\overset{\frown}{M_1N_1}$ 比较平直。当动点沿弧段从 M_1 移动到 N_1 时，切线转过的角度 $\Delta\alpha_1$ 不大，而弧段 $\overset{\frown}{M_2N_2}$ 弯曲得比较厉害，角度 $\Delta\alpha_2$ 就比较大。

但是，切线转过的角度的大小还不能完全反映曲线的弯曲程度。例如，从图 2-9-2(c) 中可以看出，两段曲线弧 $\overset{\frown}{M_3N_3}$ 和 $\overset{\frown}{M_4N_4}$ 尽管切线转过的角都是 $\Delta\alpha_3$，然而弯曲程度并不相同，短弧段比长弧段弯曲得厉害些。由此可见，曲线弧的弯曲程度还与弧段的长度有关。

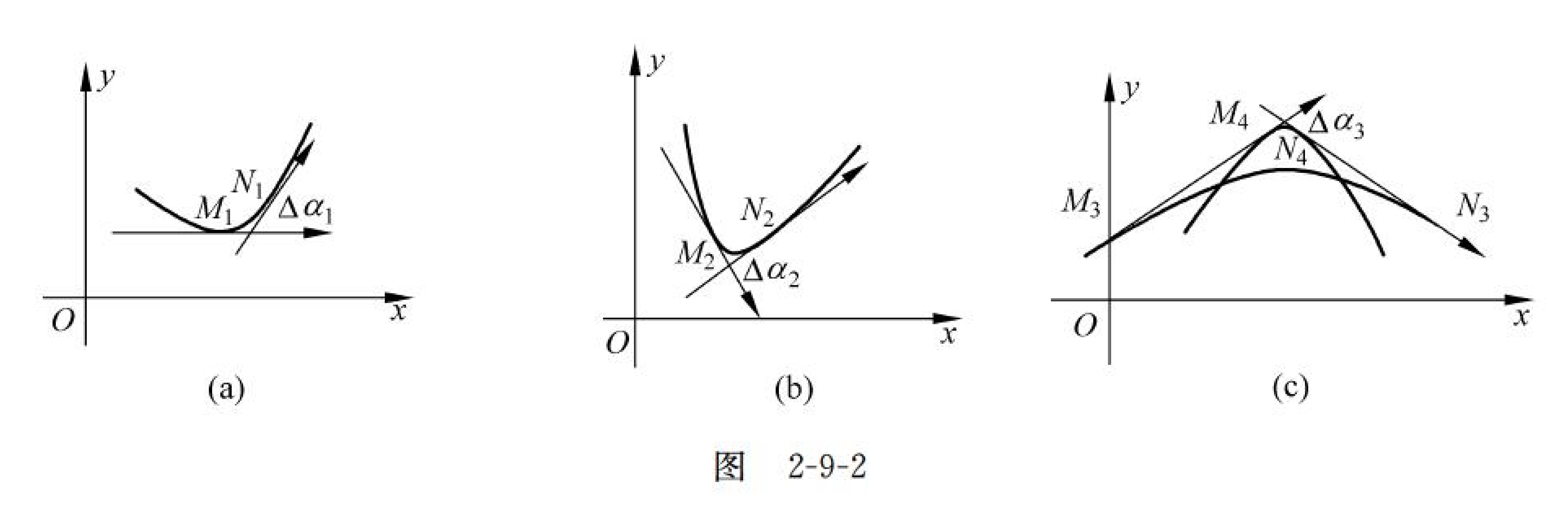


图 2-9-2

根据以上分析，我们引入描述曲线弯曲程度的曲率概念。

设曲线 C 是光滑的，在曲线 C 上选定一点 A 作为度量弧 s 的基点。设曲线上点 M 对应于弧 s，在点 M 处切线的倾角为 α（这里假定曲线 C 所在的平面上已设立了 xOy 坐标系），曲线上另一点 N 处的切线的倾角为 $\alpha+\Delta\alpha$，那么，弧段 $\overset{\frown}{MN}$ 的长度为 $|\Delta s|$，当动点从 M 移动到 N 时切线转过的角度为 $|\Delta\alpha|$，如图 2-9-3 所示。

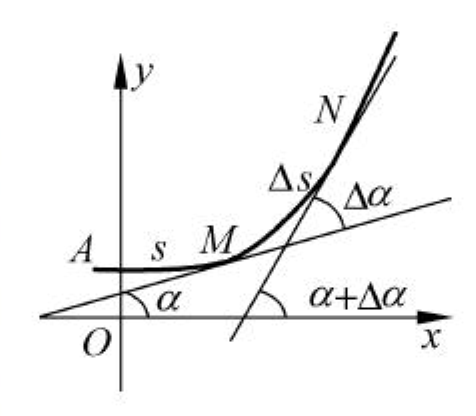


图 2-9-3

我们用比值$\frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}$即单位弧段上切线转过的角度的大小来表达弧段$\widehat{MN}$的平均弯曲程度，该比值称为弧段$\widehat{MN}$的**平均曲率**，记为$\overline{K}$，即

$$\overline{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

类似于从平均速度引进瞬时速度的方法，当$\Delta s\to 0$时（即$N\to M$时），上述平均曲率的极限叫作曲线C在点M处的**曲率**，记作K，即

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

在$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$存在的条件下，$K$也可以表示为

$$K=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$$

对于直线来说，切线与直线本身重合，当点沿直线移动时，切线的倾角α不变，$\Delta\alpha=0$，$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=0$，从而$K=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=0$。这就是说，直线上任意点$M$处的曲率等于零。这与我们直觉认识到的“直线不弯曲”一致。

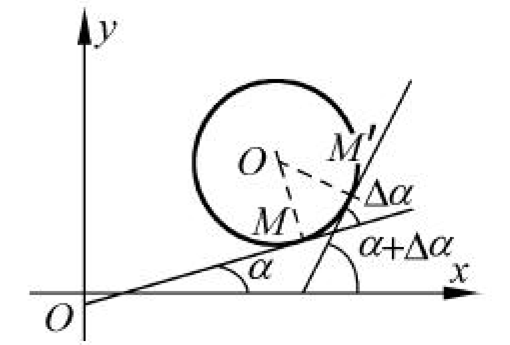


图　2-9-4

例 2-9-2　求半径为R的圆上任一点的曲率。

解　由图2-9-4可见，圆在点M和M'处的切线所夹的角$\Delta\alpha$等于中心角MOM'，即$\angle MOM'=\Delta\alpha$。因为$\angle MOM'=\frac{\Delta s}{R}$，故

$$\Delta\alpha=\frac{\Delta s}{R}$$

从而有
$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{1}{R}$$

于是
$$\overline{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\frac{1}{R}$$

其上任一点的曲率为
$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{R}=\frac{1}{R}$$

上述结论说明，圆上任一点处的曲率K都等于半径R的倒数，即圆周的弯曲程度到处一样，且半径越小曲率越大，即圆弯曲得越厉害。

在一般情况下，根据$K=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$来导出便于实际计算曲率的公式。

设曲线在直角坐标方程是$y=f(x)$，且$f(x)$具有二阶导数（这时$f'(x)$连续，从而曲线是光滑的）。因为切线的斜率为$\tan\alpha=y'$，两边微分得

$$\sec^2\alpha\mathrm{d}\alpha=y''\mathrm{d}x$$

所以
$$\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{\sec^2\alpha}y''\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}y''\mathrm{d}x=\frac{y''}{1+(y')^2}\mathrm{d}x$$

即
$$\mathrm{d}\alpha=\frac{y''}{1+(y')^2}\mathrm{d}x$$

又由于
$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x$$

所以 $$K=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{\frac{|y''|}{1+(y')^2}}{\sqrt{1+(y')^2}}=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

由此，得曲率的计算公式为

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} \tag{2-9-1}$$

例 2-9-3 计算等边双曲线 $xy=1$ 在点(1,1)处的曲率。

解 由 $y=\dfrac{1}{x}$，得

$$y'=-\frac{1}{x^2},\quad y''=\frac{2}{x^3}$$

因此 $$y'|_{x=1}=-1,\quad y''|_{x=1}=2$$

所以，曲线 $xy=1$ 在点(1,1)处的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{[1+(-1)^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

例 2-9-4 求抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上哪一点处的曲率最大。

解 因为 $$y'=2ax+b,\quad y''=2a$$

所以 $$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

因为 K 的分子是常数 $|2a|$，所以只要分母最小，K 就最大。容易看出，当 $2ax+b=0$ 即当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，K 的分母最小，因而 K 有最大值 $|2a|$。而 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 所对应的点为抛物线的顶点，因此，抛物线在顶点处的曲率最大。

在有些实际问题中，$|y'|$ 同 1 比较起来是很小的(有的工程技术书上把这种关系记成 $|y'|\ll1$)，可以忽略不计。这时，由

$$1+(y')^2\approx1$$

而有曲率的近似计算公式

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}\approx|y''|$$

这就是说，当 $|y'|\ll1$ 时，曲率 K 近似于 $|y''|$。经过这样简化之后，对一些复杂问题的计算和讨论就方便多了。

2.9.3 曲率圆与曲率半径

设曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率为 $K(K\neq0)$。在点 M 处的曲线的法线上，在凹的一侧取一点 A，使得 $AM=\dfrac{1}{K}=\rho$。以 A 为圆心，ρ 为半径作圆，这个圆称为曲线在点 M 处的**曲率圆**；曲率圆的圆心 A 称为曲线在点 M 处的**曲率中心**；曲率圆的半径 ρ 称为曲线在点 M 处的**曲率半径**，如图 2-9-5 所示。

按上述规定可知，曲率圆与曲线在点 M 处有相同的切线和曲率，且在点 M 邻近有相

同的凹向。因此，在实际问题中，常常用曲率圆在点 M 邻近的一段圆弧来近似代替曲线弧，以使问题简化。

按上述规定，曲线在点 M 处的曲率 $K(K\neq 0)$ 与曲线在点 M 处的曲率半径 ρ 有如下关系：

$$\rho=\frac{1}{K},\quad K=\frac{1}{\rho}$$

这就是说：曲线上一点处的曲率半径与曲线在该点处的曲率互为倒数。

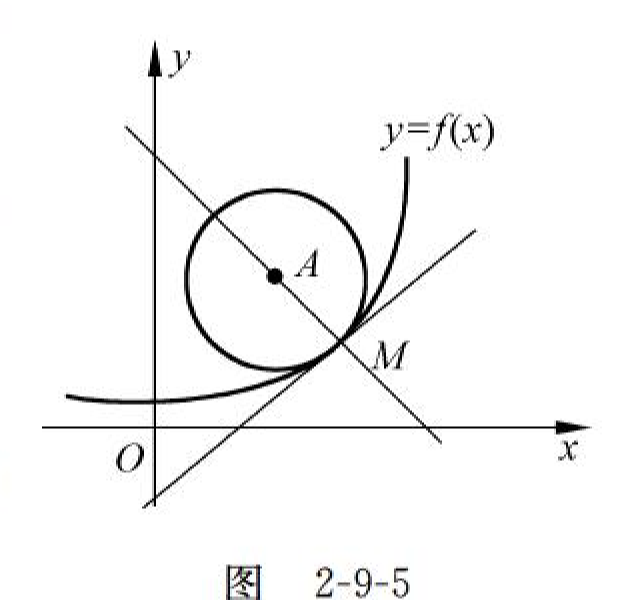
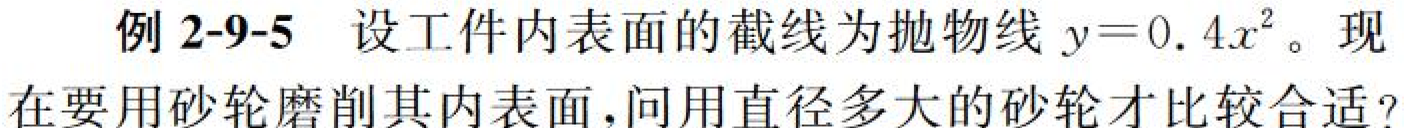


图　2-9-5



例 2-9-5　设工件内表面的截线为抛物线 $y=0.4x^2$。现在要用砂轮磨削其内表面，问用直径多大的砂轮才比较合适？

解　为了在磨削时不使砂轮与工件接触处附近的那部分工件磨去太多，砂轮的半径不应大于抛物线上各点处曲率半径中的最小值。由前面例题可知，抛物线在顶点处的曲率最大，也就是说，抛物线在顶点处的曲率半径最小。因此，只要求出抛物线 $y=0.4x^2$ 在顶点(0,0)处的曲率半径即可。

由于
$$y'=0.8x,\quad y''=0.8$$
因此
$$y'|_{x=0}=0,\quad y''|_{x=0}=0.8$$

所以，抛物线 $y=0.4x^2$ 在顶点(0,0)处的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{0.8}{[1+(0)^2]^{\frac{3}{2}}}=0.8$$

因而求得抛物线在顶点处的曲率半径为

$$\rho=\frac{1}{K}=1.25$$

所以选用砂轮的半径不得超过 1.25 单位长，即直径不得超过 2.50 单位长。

对于用砂轮磨削一般工件的内表面时，也有类似的结论，即选用的砂轮的半径不应超过该工件内表面的截线上各点处曲率半径中的最小值。

*习题 2-9

1. 求直线 $y=ax+b$ 上任一点处的曲率。
2. 求椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点(0,2)处的曲率。
3. 求曲线 $y=e^x$ 上曲率最大的点。
4. 求抛物线 $y=x^2-4x+3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径。
5. 求抛物线 $y=ax^2\,(a>0)$ 上各点处的曲率，并求 $x=a$ 处的曲率半径。

第3章

一元函数积分学

3.1 不定积分的概念与性质

3.1.1 不定积分的定义

已知某商品总收入的变化率为$R'(x)=g(x)$,求总收入函数$R(x)$。这是与求导数相反的问题。

定义 3-1-1 设$f(x)$是定义在区间X上的已知函数,若存在函数$F(x)$,使得

$$F'(x)=f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$$

则称$F(x)$为$f(x)$在区间X上的一个**原函数**。

因为$(x^3)'=3x^2$,所以x^3是$3x^2$的一个原函数,但$(x^3+1)'=(x^3+2)'=(x^3+3)'=\cdots=3x^2$,所以$3x^2$的原函数不是唯一的。

说明

(1) 原函数的存在问题。如果$f(x)$在某区间连续,那么它的原函数一定存在。

(2) 若$f(x)$存在原函数,则原函数不唯一。

定理 3-1-1 若$F(x)$是$f(x)$的一个原函数,则$F(x)+C$是$f(x)$的所有原函数,其中C为任意常数。

证明 由于$F'(x)=f(x)$,又$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$,所以函数$F(x)+C$中的每一个都是$f(x)$的原函数。

另一方面,设$G(x)$是$f(x)$的任一个原函数,即$G'(x)=f(x)$,则

$$[G(x)-F(x)]'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

所以$G(x)-F(x)=C$,或$G(x)=F(x)+C$,即$f(x)$的任一原函数均可写成$F(x)+C$的形式。证毕。

定义 3-1-2 函数$f(x)$的全体原函数称为$f(x)$的不定积分,记作$\int f(x)\mathrm{d}x$。其中,"$\int$"称为**积分号**,$f(x)$称为**被积函数**,x称为**积分变量**,$f(x)\mathrm{d}x$称为**被积表达式**。

根据定义 3-1-2，如果 $F(x)$是 $f(x)$在区间 X 上的一个原函数，那么 $F(x)+C$ 就是 $f(x)$的不定积分，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$$

因而不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 可以表示 $f(x)$的任意一个原函数。

例 3-1-1　求不定积分 $\int 3x^2\mathrm{d}x$。

解　因为$(x^3)'=3x^2$，所以 x^3 是 $3x^2$ 的一个原函数，因此，

$$\int 3x^2\mathrm{d}x = x^3+C$$

例 3-1-2　求不定积分 $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$。

解　因为$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$，所以 e^x 是 e^x 的一个原函数，因此

$$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x+C$$

例 3-1-3　求不定积分 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$。

解　当 $x>0$ 时，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$，因此

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x+C$$

当 $x<0$ 时，$[\ln(-x)]'=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$，因此

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(-x)+C$$

合并上面两式得到

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|+C \quad (x\neq 0)$$

例 3-1-4　设曲线过$(0,1)$点且在其上任一点处的切线斜率为 $3x^2$，求曲线方程。

解　设所求曲线方程为 $y=f(x)$，则由题意知，$y'=3x^2$，因此

$$y = \int 3x^2\mathrm{d}x = x^3+C$$

又因为曲线过点$(0,1)$，所以 $1=0^3+C$，得 $C=1$，因此所求方程为

$$y = x^3+1$$

一个原函数 $F(x)$的图像称为 $f(x)$的一条积分曲线，其方程为 $y=F(x)$。不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 在**几何上**表示曲线 $y=F(x)$沿 y 轴上下平移一定的距离而得到的一族积分曲线，它们的方程是 $y=F(x)+C$。这一族积分曲线的特点是，它们在横坐标相同的点处的切线斜率相等，即在这些点处的切线是互相平行的，如图 3-1-1 所示。

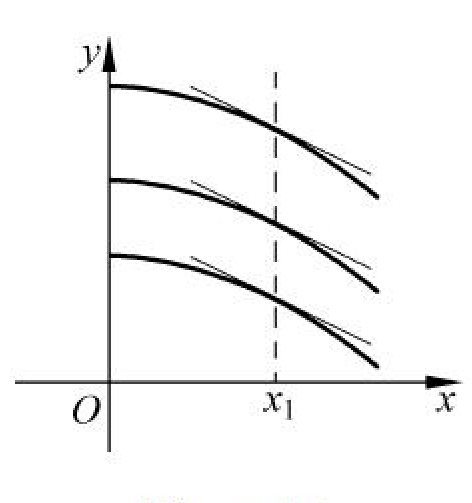


图　3-1-1

3.1.2 基本积分表

由于求不定积分是求导数的逆运算，所以由导数公式可以得出相应的积分公式。

例如，因为$\left(\dfrac{x^{a+1}}{a+1}\right)'=x^a$，所以$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$是 x^a 的一个原函数，故

$$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1}+C \quad (a \neq -1)$$

类似地，可以得到其他积分公式。下面把一些基本的积分公式列成一个表，这个表通常叫作**基本积分表**。

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx+C$ （k 为常数）

(2) $\int x^a \mathrm{d}x=\dfrac{x^{a+1}}{a+1}+C \quad (a\neq -1)$

(3) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$

(4) $\int a^x \mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$

(5) $\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$

(6) $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$

(7) $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$

(8) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$

(9) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \csc^2 x\mathrm{d}x =- \cot x + C$

(10) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$

(11) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$

(12) $\int \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C$

(13) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C$

以上积分基本公式是积分运算的基础，必须熟记。

由积分公式(2)、(3)还可以看出，幂函数 x^a 的不定积分为

$$\int x^a \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{x^{a+1}}{a+1}+C & a \neq -1 \\ \ln|x|+C & a = -1 \end{cases}$$

由此可见，幂函数(除 x^{-1}外)的原函数都是幂函数。

3.1.3　不定积分的性质

性质 3-1-1　由不定积分的定义可知，求不定积分的运算与求导运算是互逆的，若对函数先求积分再求导数就等于该函数自身；若对函数先求导数再求积分则等于该函数本身与一个积分常数之和，即

$$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x)$$

$$\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$$

由不定积分的定义还可推出不定积分运算的另外两条重要性质。

性质 3-1-2　两个函数代数和的积分，等于各函数积分的代数和，即

$$\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$

此性质对有限多个函数的和也成立。它表明和函数可逐项积分。

性质 3-1-3　被积函数中的常数因子可提到积分号外，即

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x \quad (k\text{ 为常数，且 }k \neq 0)$$

性质 3-1-2 与性质 3-1-3 很容易证明，只要验证右端的导数等于左端的被积函数，并且右端的确含有一个任意常数 C 即可。

利用不定积分的性质和基本积分表，就可以求一些简单函数的不定积分。

例 3-1-5　求不定积分 $\int (3\mathrm{e}^x - \sin x)\mathrm{d}x$。

解　$$\int (3\mathrm{e}^x - \sin x)\mathrm{d}x = 3\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x - \int \sin x\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^x + \cos x + C$$

注：在分项积分后，不必每一个积分结果都“$+C$”，只要在总的结果中加一个 C 就行了。

例 3-1-6　求不定积分 $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$。

解　$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = -2\frac{1}{\sqrt{x}} + \ln|x| + C$$

例 3-1-7　求不定积分 $\int (\sqrt{x}+1)\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$。

解　$$\begin{aligned}\int (\sqrt{x}+1)\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x &= \int \left(x\sqrt{x} + x - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int x\mathrm{d}x - \int 1\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^2 - x - 2x^{\frac{1}{2}} + C\end{aligned}$$

例 3-1-8 求不定积分$\int \frac{3x^2-2x+1}{x}\mathrm{d}x$。

解 $$\int \frac{3x^2-2x+1}{x}\mathrm{d}x=\int\left(3x-2+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=3\int x\mathrm{d}x-\int 2\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}x^2-2x+\ln|x|+C$$

例 3-1-9 求不定积分$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{3}\right)^2\mathrm{d}x$。

解 $$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{3}\right)^2\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3}+\frac{x^2}{9}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+\frac{2}{3}x+\frac{1}{27}x^3+C$$

例 3-1-10 求不定积分$\int\frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x$。

解 $$\int\frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int 1\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=x-\arctan x+C$$

例 3-1-11 求不定积分$\int 3^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$。

解 $$\int 3^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int(3\mathrm{e})^x\mathrm{d}x=\frac{(3\mathrm{e})^x}{\ln 3\mathrm{e}}+C=\frac{3^x\mathrm{e}^x}{1+\ln 3}+C$$

例 3-1-12 求不定积分$\int\tan^2x\mathrm{d}x$。

解 $$\int\tan^2x\mathrm{d}x=\int(\sec^2x-1)\mathrm{d}x=\int\sec^2x\mathrm{d}x-\int 1\mathrm{d}x=\tan x-x+C$$

例 3-1-13 求不定积分$\int\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$。

解 $$\int\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\cos x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int 1\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+C$$

***例 3-1-14** 求不定积分$\int\frac{\cos 2x}{\sin^2x\cos^2x}\mathrm{d}x$。

解 $$\int\frac{\cos 2x}{\sin^2x\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\sin^2x\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sin^2x}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\cos^2x}\mathrm{d}x$$

$$=-\cot x-\tan x+C$$

***例 3-1-15** 求不定积分$\int\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$。

解 $$\int\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int\frac{2}{(\sin x)^2}\mathrm{d}x=2\int\csc^2x\mathrm{d}x=-2\cot x+C$$

注： 当不定积分不能直接应用基本积分表和不定积分的性质进行计算时，须先将被积函数进行化简或恒等变形再进行计算。要检验计算结果是否正确，只须对结果求导，看其导数是否等于被积函数。例如，要检查例 3-1-5 的结果是否正确，只须计算

$$(3\mathrm{e}^x+\cos x+C)'=3\mathrm{e}^x-\sin x$$

就可以肯定计算结果一定正确。

习题 3-1

1. 填空题。

(1) $(\quad)'=\dfrac{1}{1+x^2}$　　(2) $(\quad)'=-2\cos x$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\quad)=x^2$　　(4) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\quad)=\mathrm{e}^x+\cos x$

(5) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$　　(6) $\mathrm{d}(\quad)=(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$

2. 求下列不定积分。

(1) $\int 3x^5\mathrm{d}x$　　(2) $\int 3\sqrt[3]{x^5}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \dfrac{1}{x^3}\mathrm{d}x$　　(4) $\int \dfrac{1}{3\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(5) $\int (\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$　　(6) $\int a^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

(7) $\int \dfrac{3\cdot 2^x-5\cdot 3^x}{2^x}\mathrm{d}x$　　(8) $\int\left(3\mathrm{e}^x+\dfrac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$

(9) $\int \dfrac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　(10) $\int \sin^2\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$

(11) $\int \cot^2 x\mathrm{d}x$　　(12) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$

(13) $\int \dfrac{x^2-2}{x^2+1}\mathrm{d}x$　　(14) $\int \dfrac{3x^4+2x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x$

(15) $\int \csc x(\csc x-\cot x)\mathrm{d}x$　　(16) $\int \mathrm{e}^{x-1}\mathrm{d}x$

3. 设 $\sin x+\mathrm{e}^x$ 是 $f(x)$的一个原函数，求函数 $f(x)$。

4. 设 $\int f(x)\mathrm{d}x=2\sin\dfrac{x^2}{2}+C$，求 $f'(x)$。

3.2　换元积分法

利用基本积分表与积分的两个运算性质，我们已经会求一些函数的不定积分。但在许多情况下，一些简单函数的不定积分也难以用直接积分法求出，如 $\int\cos 2x\mathrm{d}x$，$\int\tan x\mathrm{d}x$ 。本节将进一步介绍其他积分方法。

3.2.1　第一换元积分法（凑微分法）

定理 3-2-1　如果积分 $\int g(x)\mathrm{d}x$ 可以转换为 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 的形式，设 $f(u)$具有原函数，且 $F(u)$，$u=\varphi(x)$可导，则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) = \int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+C = F[\varphi(x)]+C$$

被积表达式中的 $\mathrm{d}x$ 可当作变量 x 的微分来对待，从而微分等式 $\varphi'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$ 可以应用到被积表达式中。

例 3-2-1 求不定积分 $\int(2x+1)^3\mathrm{d}x$。

解 被积函数$(2x+1)^3$ 是以下两个函数的复合函数：

$$(2x+1)^3 = u^3,\quad u = 2x+1$$

做变换 $u=2x+1$，则有

$$\int(2x+1)^3\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(2x+1)^3\mathrm{d}(2x+1) = \frac{1}{2}\int u^3\mathrm{d}u = \frac{1}{8}u^4+C$$
$$= \frac{1}{8}(2x+1)^4+C$$

例 3-2-2 求不定积分 $\int\cos 2x\mathrm{d}x$。

解 被积函数 $\cos 2x$ 是以下两个函数的复合函数：

$$\cos 2x = \cos u,\quad u = 2x$$

做变换 $u=2x$，则有

$$\int\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\cos 2x\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\int\cos u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sin u+C = \frac{1}{2}\sin 2x+C$$

例 3-2-3 求不定积分 $\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$。

解 被积函数的一个因子为

$$\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^u,\quad u = x^2$$

剩下的因子恰好是中间变量 $u=x^2$ 的导数，于是有

$$\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \int\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2) = \int\mathrm{e}^u\mathrm{d}u = \mathrm{e}^u+C = \mathrm{e}^{x^2}+C$$

例 3-2-4 求不定积分 $\int\sin^2 x\cos x\mathrm{d}x$。

解 被积函数中的一个因子为

$$\sin^2 x = u^2,\quad u = \sin x$$

余下的因子 $\cos x$ 恰好是中间变量 $u=\sin x$ 的导数，于是有

$$\int\sin^2 x\cos x\mathrm{d}x = \int\sin^2 x\mathrm{d}(\sin x) = \int u^2\mathrm{d}u = \frac{u^3}{3}+C = \frac{\sin^3 x}{3}+C$$

例 3-2-5 求不定积分 $\int\frac{1}{\sqrt{2-3x}}\mathrm{d}x$。

解 被积函数$\frac{1}{\sqrt{2-3x}}=(2-3x)^{-\frac{1}{2}}$是以下两个函数的复合函数：

$$(2-3x)^{-\frac{1}{2}} = u^{-\frac{1}{2}},\quad u = 2-3x$$

做变换 $u=2-3x$，则有

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-3x}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int (2-3x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(2-3x)$$

$$=-\frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u=-\frac{2}{3}u^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{2}{3}(2-3x)^{\frac{1}{2}}+C$$

例 3-2-6　求不定积分 $\int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$。

解　设 $u=\ln x$，则 $\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$。因此，

$$\int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}(\ln x)=\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u=\ln|u|+C=\ln|\ln x|+C$$

说明　在对变量代换方法熟悉后，可略去中间的换元步骤，直接凑微分后积分即可。

例 3-2-7　求不定积分 $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$。

解
$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\sqrt{x})=2\sin\sqrt{x}+C$$

例 3-2-8　求不定积分 $\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$。

解
$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\int \frac{1}{1+(\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\arctan\mathrm{e}^x+C$$

例 3-2-9　求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$。

解
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

类似可得
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

例 3-2-10　求不定积分 $\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x$。

解
$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}x-\int \frac{1}{x+a}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}(x-a)-\int \frac{1}{x+a}\mathrm{d}(x+a)\right]$$

$$=\frac{1}{2a}(\ln|x-a|-\ln|x+a|)+C$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

例 3-2-11　求不定积分 $\int \tan x\mathrm{d}x$。

解
$$\int \tan x\mathrm{d}x=\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)=-\ln|\cos x|+C$$

类似可得
$$\int \cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$$

例 3-2-9～例 3-2-11 中的 5 个积分可以作为公式使用。

例 3-2-12 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x$。

解
$$\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\int \cos\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin\frac{1}{x} + C$$

例 3-2-13 求不定积分 $\int \sin^2 x\mathrm{d}x$。

解
$$\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\int \cos 2x\mathrm{d}(2x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

例 3-2-14 求不定积分 $\int \sin^4 x\cos x\mathrm{d}x$。

解
$$\int \sin^4 x\cos x\mathrm{d}x = \int \sin^4 x\mathrm{d}(\sin x) = \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

例 3-2-15 求不定积分 $\int \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x$。

解
$$\int \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int \sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\frac{x}{2} + C$$

例 3-2-16 求不定积分 $\int \csc x\mathrm{d}x$。

解
$$\int \csc x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

因为
$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \csc x - \cot x$$

故上述不定积分又可写为
$$\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

例 3-2-17 求不定积分 $\int \sec x\mathrm{d}x$。

解
$$\int \sec x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$= \ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \cot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

*例 3-2-18 求不定积分 $\int \cos 2x \cos 4x \mathrm{d}x$。

解
$$\int \cos 2x \cos 4x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\cos 2x + \cos 6x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\int \cos 2x \mathrm{d}(2x) + \frac{1}{6}\int \cos 6x \mathrm{d}(6x)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{12}\sin 6x + C$$

注：由以上例题可以看出，在运用换元积分法时，有时需要对被积函数做适当的代数运算或三角运算，然后再凑微分，技巧性很强，无一般规律可循。因此，只有在练习过程中，随时总结、归纳，积累经验，才能灵活运用。下面给出几种常见的凑微分形式。

(1) $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$

(2) $\int f(ax^n+b)x^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{na}\int f(ax^n+b)\mathrm{d}(ax^n+b)$

(3) $\int f(\ln x)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$

(4) $\int f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$

(5) $\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$

(6) $\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)$

(7) $\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x)$

(8) $\int f(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)$

(9) $\int f(\cot x)\csc^2 x\mathrm{d}x = -\int f(\cot x)\mathrm{d}(\cot x)$

(10) $\int f(\arcsin x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)$

(11) $\int f(\arctan x)\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)$

3.2.2 第二换元积分法

第一换元积分法是选择新的积分变量 $u=\varphi(x)$，但对有些被积函数则需要做相反方式的换元，即令 $x=\varphi(t)$，把 t 作为新的积分变量，才能积出来。

定理 3-2-2 设 $x=\varphi(t)$是单调的、可导的函数，并且 $\varphi'(t)\neq 0$；又设 $F[\varphi(t)]\varphi'(t)$具有原函数 $\Phi(t)$，则有换元公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = \Phi(t)+C = \Phi[\varphi^{-1}(x)]+C$$

其中，$t=\varphi^{-1}(x)$是 $x=\varphi(t)$的反函数。

这种方法称为**第二换元积分法**。

使用第二换元积分法的关键是恰当地选择变换 $x=\varphi(t)$。对于 $x=\varphi(t)$。要求其单调、可导，且其反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$存在。

1. 简单根式代换

例 3-2-19 求不定积分 $\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$。

解 为消去根式，令$\sqrt{x}=t$，$x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}=\int\frac{2t\mathrm{d}t}{1+t}=2\int\frac{t+1-1}{1+t}\mathrm{d}t=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2t-2\ln(t+1)+C=2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C$$

例 3-2-20 求不定积分 $\int\frac{2x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$。

解 设 $\sqrt{x-1}=u$，即 $x=u^2+1$，$\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$，则

$$\int\frac{2x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{2(u^2+1)}{u}\cdot 2u\mathrm{d}u=4\int(u^2+1)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{4}{3}u^3+4u+C=\frac{4}{3}\sqrt{(x-1)^3}+4\sqrt{x-1}+C$$

例 3-2-21 求不定积分 $\int\frac{1}{1-\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$。

解 设 $u=\sqrt[3]{x+1}$，即 $x=u^3-1$，$\mathrm{d}x=3u^2\mathrm{d}u$，则

$$\int\frac{1}{1-\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1-u}\cdot 3u^2\mathrm{d}u=3\int\frac{u^2-1+1}{1-u}\mathrm{d}u$$

$$=-3\int(u+1)\mathrm{d}u-3\int\frac{1}{u-1}\mathrm{d}u=-\frac{3}{2}u^2-3u-3\ln|u-1|+C$$

$$=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}-3\ln\left|\sqrt[3]{x+1}-1\right|+C$$

例 3-2-22 求不定积分 $\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x$。

解 为消去根式，令$\sqrt[6]{x}=t$ 即 $x=t^6$，则 $\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$。代入后得

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x=\int\frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}\mathrm{d}t=6\int\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=6\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=6\left(\int\mathrm{d}t-\int\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t\right)=6t-6\arctan t+C$$

$$=6\sqrt[6]{x}-6\arctan\sqrt[6]{x}+C$$

可以看出，若被积函数中含有一个被开方式为一次式的根式 $\sqrt[n]{ax+b}$时，令 $\sqrt[n]{ax+b}=t$ 可以消去根式，从而求得积分。

2. 三角代换

若被积函数含有被开方式为二次式的根式时，可使用三角代换消去根式。

一般地，当被积函数含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，做代换 $x=a\sin t$；如果被积函数含有 $\sqrt{x^2+a^2}$，做代换 $x=a\tan t$；如果被积函数含有 $\sqrt{x^2-a^2}$，做代换 $x=a\sec t$。

例 3-2-23 求不定积分 $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,(a>0)$。

解 做三角代换 $x=a\sin t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\int a\cos t\,a\cos t\,\mathrm{d}t = a^2\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$
$$=a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C$$

为了把变量还原为 x，根据 $\sin t=\frac{x}{a}$ 作如图 3-2-1 所示的辅助三角形，于是有

图 3-2-1

$$\cos t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$
$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$
$$t = \arcsin\frac{x}{a}$$

代入后得

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$$

例 3-2-24 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x\,(a>0)$。

解 为了去掉根号，令 $x=a\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t = \ln|\sec t+\tan t|+C$$

图 3-2-2

为了把 $\sec t$ 和 $\tan t$ 换成 x 的函数，根据 $\tan t=\frac{x}{a}$ 作如图 3-2-2 所示的辅助三角形，于是有 $\sec t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$，代入后得

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)+C_1$$
$$=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C \quad (C=C_1-\ln a)$$

例 3-2-25 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x\,(a>0)$。

解 当 $x>a$ 时，设 $x=a\sec t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{a\sec t\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t = \int \sec t\mathrm{d}t = \ln(\sec t + \tan t) + C$$

根据 $\sec t = \frac{x}{a}$ 作如图 3-2-3 所示的辅助三角形，于是有

图 3-2-3

$\tan t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$，代入后得

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) + C_1$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C(C = C_1 - \ln a)$$

当 $x<-a$ 时，令 $x=-u$，那么 $u>a$，由上段结果，有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-a^2}} = -\ln(u + \sqrt{u^2-a^2}) + C$$

$$= -\ln(-x + \sqrt{x^2-a^2}) + C = \ln\frac{(-x-\sqrt{x^2-a^2})}{a^2} + C$$

$$= \ln(-x - \sqrt{x^2-a^2}) + C_1(C_1 = C - 2\ln a)$$

把在 $x>a$ 及 $x<-a$ 内的结果合起来，可写作

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

3.2.3 补充公式

在本节的例题中，有几个积分是以后经常会遇到的。所以它们通常也被当作公式使用。这样常用的积分公式，除了基本积分表中的几个外，再添加下面几个（其中常数 $a>0$）：

(1) $\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$

(2) $\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

(3) $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$

(4) $\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$

(5) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

(6) $\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$

(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$

(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$

习题 3-2

求下列不定积分。

(1) $\int \sin 3x \mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{3-2x}}$

(3) $\int \frac{1}{1-\cos x}\mathrm{d}x$

(4) $\int \cos(2x-5)\mathrm{d}x$

(5) $\int \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$

(6) $\int \mathrm{e}^{\sin x}\cos x \mathrm{d}x$

(7) $\int \frac{2+\ln x}{x}\mathrm{d}x$

(8) $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$

(9) $\int (x^2-3x+2)^5(2x-3)\mathrm{d}x$

(10) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$

(11) $\int \mathrm{e}^x\sqrt{5+3\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

(12) $\int \frac{\ln(1+x)}{1+x}\mathrm{d}x$

(13) $\int \frac{\sin(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(14) $\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

(15) $\int \sin^5 x\cos x \mathrm{d}x$

(16) $\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}\mathrm{d}x$

(17) $\int x\sin x^2 \mathrm{d}x$

(18) $\int \frac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x$

(19) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

(20) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

(21) $\int \frac{x\mathrm{e}^{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

(22) $\int \cos\varphi \cdot \cos(\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$

(23) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(24) $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$

(25) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x$

(26) $\int \sqrt{1-4x^2}\mathrm{d}x$

(27) $\int \frac{1}{(\sqrt{9+x^2})^3}\mathrm{d}x$

(28) $\int \frac{3+x}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$

3.3　分部积分法

换元积分法在计算不定积分时起了很重要的作用，但是只有这种方法还是远远不够的，因为像 $\int \ln x \mathrm{d}x$，$\int x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ 等类型的积分是不能利用换元积分法计算出来的。下面介绍另一种常用的积分方法——**分部积分法**。

定理 3-3-1 设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$具有连续的导数，则有如下分部积分公式：

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

证明 由函数乘积的微分公式，有

$$\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$$

移项得

$$u\mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v\mathrm{d}u$$

两边积分得

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u \tag{3-3-1}$$

证毕。

分部积分公式的意义在于，它可以将求 $\int u\mathrm{d}v$ 的积分问题转化为求$\int v\mathrm{d}u$ 的积分，当后者容易求出时，分部积分公式就起到了化难为易的作用。

运用好分部积分法的关键是恰当地选择好 u 和 $\mathrm{d}v$，其选择原则如下。

(1) 要从 $\mathrm{d}v$ 中容易求得 v；

(2) $\int v\mathrm{d}u$ 要比$\int u\mathrm{d}v$ 容易积出。

例 3-3-1 求不定积分 $\int x\cos x\mathrm{d}x$。

解 设 $u=x$，$\mathrm{d}v=\cos x\mathrm{d}x$，则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，$v=\sin x$。代入公式(3-1-1)，得

$$\int x\cos x\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}(\sin x) = x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C$$

例 3-3-2 求不定积分 $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$。

解 设 $u=x$，$\mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$，则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，$v=\mathrm{e}^x$，于是

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C$$

从上面两例可以看出，当被积函数是幂函数与指数函数或幂函数与三角函数的乘积时，应选取幂函数为 u，将指数函数或三角函数与 $\mathrm{d}x$ 凑微分。

当熟悉分部积分后，u 与 $\mathrm{d}v$ 不必具体写出。

例 3-3-3 求不定积分 $\int x\ln x\mathrm{d}x$。

解

$$\begin{aligned}\int x\ln x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \ln x\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C\end{aligned}$$

例 3-3-4 求不定积分 $\int x^2\ln x\mathrm{d}x$。

解

$$\begin{aligned}\int x^2\ln x\mathrm{d}x &= \int \ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^3\mathrm{d}(\ln x) \\ &= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C\end{aligned}$$

例 3-3-5 求不定积分 $\int \arccos x\mathrm{d}x$。

解
$$\begin{aligned}\int \arccos x\mathrm{d}x &= x\arccos x - \int x\mathrm{d}(\arccos x)\\ &= x\arccos x + \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\ &= x\arccos x - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)\\ &= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

此题的被积函数是单一函数,可看成被积表达式已经分成 $u\mathrm{d}v$ 的形式,所以可直接应用公式。

例 3-3-6 求不定积分 $\int x\arctan x\mathrm{d}x$。

解
$$\begin{aligned}\int x\arctan x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \arctan x\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C\end{aligned}$$

由例 3-3-3、例 3-3-4 和例 3-3-6 可以看出,当被积函数是幂函数与对数函数或幂函数与反三角函数的乘积时,应选取对数函数或反三角函数为 u,将幂函数与 $\mathrm{d}x$ 凑微分。

例 3-3-7 求不定积分 $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$。

解
$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x &= \int x^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = x^2\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}(x^2)\\ &= x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)\\ &= x^2\mathrm{e}^x - 2(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x) + C\end{aligned}$$

例 3-3-8 求不定积分 $\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$。

解
$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x &= \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}(\sin x) = \mathrm{e}^x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)\\ &= \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin x + \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}(\cos x)\\ &= \mathrm{e}^x\sin x + \mathrm{e}^x\cos x - \int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

将再次出现的 $\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$ 移到左端,合并后除以 2 可得所求积分为

$$\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) + C$$

例 3-3-8 的求解,用两次分部积分后出现了“循环”现象,这时所求积分可用解方程的方法求得。

例 3-3-9 求不定积分 $\int e^{\sqrt{x}}dx$。

解 令 $x=t^2$，则 $dx=2tdt$，于是

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int te^t dt = 2e^t(t-1)+C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$$

* **例 3-3-10** 求不定积分 $\int \sec^3 x dx$。

解
$$\begin{aligned}\int \sec^3 x dx &= \int \sec x \cdot \sec^2 x dx = \int \sec x d(\tan x)\\
&= \sec x\tan x - \int \sec x \tan^2 x dx\\
&= \sec x\tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)dx\\
&= \sec x\tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx\\
&= \sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x dx\end{aligned}$$

所以
$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}(\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$$

* **例 3-3-11** 求不定积分 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$。

解 令 $t=\sqrt{e^x-1}$，则 $e^x=1+t^2$，$x=\ln(1+t^2)$，$dx=\frac{2t}{1+t^2}dt$。于是

$$\begin{aligned}\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx &= \int \frac{\ln(1+t^2)\cdot(1+t^2)}{t}\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt\\
&= 2\int \ln(1+t^2)dt = 2\left[t\ln(1+t^2) - \int \frac{2t^2}{1+t^2}dt\right]\\
&= 2t\ln(1+t^2) - 4\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt\\
&= 2t\ln(1+t^2) - 4t + 4\arctan t + C\\
&= 2\sqrt{e^x-1}\ln(e^x) - 4\sqrt{e^x-1} + 4\arctan\sqrt{e^x-1} + C\\
&= 2x\sqrt{e^x-1} - 4\sqrt{e^x-1} + 4\arctan\sqrt{e^x-1} + C\end{aligned}$$

习题 3-3

1. 求下列不定积分。

(1) $\int x\sin x dx$　　　　(2) $\int (x+1)e^x dx$

(3) $\int \ln x dx$　　　　(4) $\int \operatorname{arccot} x dx$

(5) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$　　　　(6) $\int x^2\arctan x dx$

(7) $\int e^x \sin x \mathrm{d}x$　　(8) $\int\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)e^x \mathrm{d}x$

(9) $\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$　　(10) $\int x e^{4x}\mathrm{d}x$

(11) $\int x^2 a^x \mathrm{d}x$　　(12) $\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

2. 求不定积分 $\int x f''(x)\mathrm{d}x$。

*3.4　有理函数及三角函数有理式的积分

前面介绍了不定积分两类重要的积分法——换元积分法和分部积分法。本节简要介绍有理函数的积分及三角函数有理式的积分。

3.4.1　有理函数的积分

有理函数是指由两个多项式的商所表示的函数，即具有如下形式的函数：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

其中，m 和 n 都是非负整数；$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 及 $b_0,b_1,b_2,\cdots,b_m$ 都是实数，并且 $a_0\neq0$，$b_0\neq0$。当 $n<m$ 时，称该有理函数为**真分式**；而当 $n\geqslant m$ 时，称该有理函数为**假分式**。

假分式总可以转换成一个多项式与一个真分式之和的形式。例如：

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=\frac{x(x^2+1)+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1}$$

对于真分式$\frac{P(x)}{Q(x)}$，如果分母可分解为两个多项式的乘积，即 $Q(x)=Q_1(x)Q_2(x)$，且 $Q_1(x)$和 $Q_2(x)$没有公因式，那么它可分拆成两个真分式之和，即 $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$。上述步骤称为把真分式转换成部分分式之和。如果 $Q_1(x)$或 $Q_2(x)$还能再分解成两个没有公因式的多项式的乘积，那么就可将其分拆成更简单的部分分式。

下面举几个真分式积分的例子。

求真分式的不定积分时，如果分母可因式分解，则先因式分解，然后化成部分分式，再积分。

例 3-4-1　求不定积分 $\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$。

解　被积函数分母可分解成$(x-2)(x-3)$，故可设

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$$

其中，A,B 为待定系数。将上式两端去分母后，得

$$x+3=A(x-2)+B(x-3)$$

即 $$x+3=(A+B)x+(-2A-3B)$$

比较上式两端同次幂的系数，即有

$$\begin{cases}A+B=1\\2A+3B=-3\end{cases}$$

从而解得

$$\begin{cases}A=6\\B=-5\end{cases}$$

因此

$$\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}dx=\int\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}dx=\int\left(\frac{6}{x-3}-\frac{5}{x-2}\right)dx$$

$$=\int\frac{6}{x-3}dx-\int\frac{5}{x-2}dx=6\ln|x-3|-5\ln|x-2|+C$$

例 3-4-2 求不定积分 $\int\frac{1}{x(x^2+1)}dx$。

解 设 $$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

则 $$1=A(x^2+1)+(Bx+C)x$$

即 $$1=(A+B)x^2+Cx+A$$

有

$$\begin{cases}A+B=0\\C=0\\A=1\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=0\end{cases}$$

因此

$$\int\frac{1}{x(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

例 3-4-3 求不定积分 $\int\frac{2x+5}{(x+1)(x^2+4x+6)}dx$ 。

解 设 $$\frac{2x+5}{(x+1)(x^2+4x+6)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+6}$$

则 $$2x+5=A(x^2+4x+6)+(x+1)(Bx+C)$$

即 $$2x+5=(A+B)x^2+(4A+B+C)x+(6A+C)$$

有

$$\begin{cases}A+B=0\\4A+B+C=2\\6A+C=5\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=-1\end{cases}$$

因此

$$\int \frac{2x+5}{(x+1)(x^2+4x+6)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x - \int \frac{x+1}{x^2+4x+6}\mathrm{d}x$$

$$= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4x+6)'}{x^2+4x+6}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+4x+6}\mathrm{d}x$$

$$= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+6) + \int \frac{1}{2+(x+2)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+6) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{2}} + C$$

3.4.2　三角函数有理式的积分

三角函数有理式是指由三角函数和常数经过有限次四则运算所构成的函数，其特点是分子和分母都包含三角函数的和、差及乘积运算。由于各种三角函数都可以用 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的有理式表示，故三角函数有理式也就是 $\sin x$、$\cos x$ 的有理式。

用于三角函数有理式积分的变换如下。

把 $\sin x$、$\cos x$ 表示成 $\tan\frac{x}{2}$的函数，然后做变换 $u=\tan\frac{x}{2}$：

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$x = 2\arctan u$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

变换后原积分变成了有理函数的积分。

例 3-4-4　求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$。

解　做变换 $u=\tan\frac{x}{2}$，则有 $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$，$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$，于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \int \frac{\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}} = 2\int \frac{1}{3+u^2}\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{u}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right) + C$$

例 3-4-5　求不定积分 $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$。

解　做变换 $u=\tan\frac{x}{2}$，则有 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$，$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$，$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$，于是

$$\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx=\int \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot \frac{2}{1+u^2}dx$$

$$=\int \frac{du}{1+u}=\ln|1+u|+C=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

例 3-4-6 求不定积分 $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$。

解 $$\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx=\int \frac{1}{1+\sin x}d(\sin x+1)=\ln(1+\sin x)+C$$

注：并非所有的三角函数有理式的积分都要通过变换化为有理函数的积分。

习题 3-4

求下列不定积分。

(1) $\int \frac{x+6}{x^2+3x-10}dx$　　(2) $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx$

(3) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$　　(4) $\int \cos^3 x\sin^2 x dx$

(5) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$　　(6) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$

3.5 定积分的概念与性质

3.5.1 引例

1. 曲边梯形的面积

平面直角坐标系中，由连续曲线 $y=f(x)$（$f(x)\geqslant 0$）与直线 $x=a$，$x=b$ 和 x 轴所围成的平面图形，称为**曲边梯形**，如图 3-5-1 所示，其中曲线弧称为**曲边**。

我们知道，矩形的高是不变的，它的面积可按公式

$$\text{矩形面积}=\text{高}\times\text{底}$$

来定义和计算；而曲边梯形在底边上各点处的高 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是变动的，故它的面积不能直接按上述公式来定义和计算。然而，由于曲边梯形的高 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续变化的，在很小的一段区间上它的变化很小，近似于不变，因此，如果将区间 $[a,b]$ 划分为许多小区间，在每个小区间上用其中某一点处的高来近似代替同一个小区间上的**窄曲边梯形**的变高，那么，每个窄曲边梯形就可近似地看成这样得到的**窄矩形**。以所有这些窄矩形面积之和作为曲边梯形面积的近似值，并把区间 $[a,b]$ 无限细分下去，即使每个小区间的长度都近似趋于零，这时所有窄矩形面积之和的极限就可定义为**曲边梯形的面积**。这个定义同时给出了计算曲边梯形面积的方法，现详述如下。

(1) 分割。用分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$ 将区间 $[a,b]$ 分成 n

个小区间：

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{i-1},x_i],\cdots,[x_{n-1},x_n]$$

其中，第 i 个小区间的长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,3,\cdots,n)$。过每一个分点 $x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$作 x 轴的垂线，将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形，如图 3-5-2 所示，其面积记为 $\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$，则整个曲边梯形的面积为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta S_i$。

(2) 代替。在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点 $\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$，用以 Δx_i 为底，$f(\xi_i)$为高作小矩形(图 3-5-2)的面积近似代替同底的小曲边梯形的面积，即

$$\Delta S_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

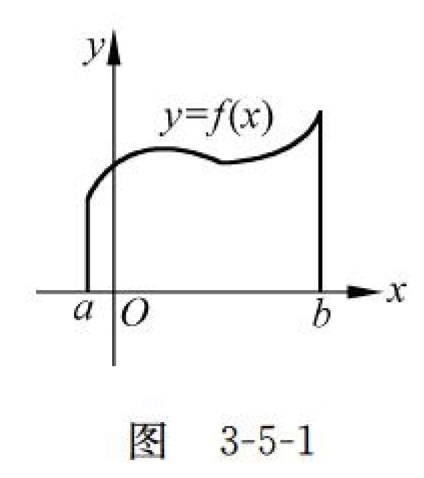


图　3-5-1

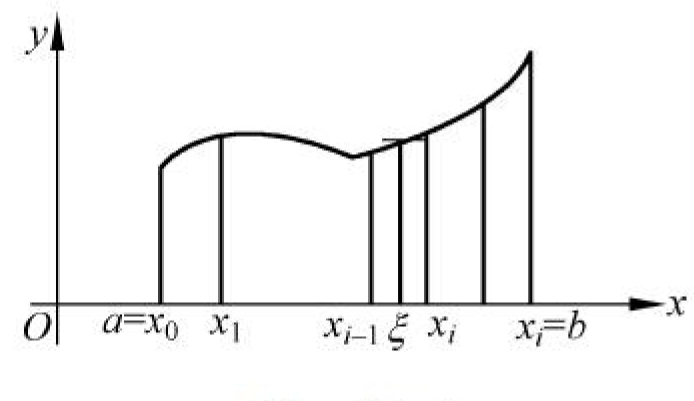


图　3-5-2

(3) 求和。将 n 个小矩形的面积加起来，就得到所求曲边梯形面积的近似值为 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta S_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$。

(4) 取极限。当区间$[a,b]$无限细分，即分点数 n 无限增大，每个小区间 $\Delta x_i(i=1,2,3,\cdots,n)$无限减小，且 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$趋于零时，$S_n$ 的极限就是曲边梯形面积的精确值，即

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

2. 变速直线运动的路程

设物体作变速直线运动，已知速度 $u=u(t)$是时间 t 在$[T_1,T_2]$的函数，求在这段时间间隔内物体所走的路程 S。

(1) 分割。将时间 t 的区间$[T_1,T_2]$用分点 $T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_{n-1}<t_n=T_2$ 分为 n 个小区间$[t_{i-1},t_i]$，记 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$。

(2) 近似。在每个小区间$[t_{i-1},t_i]$上，以任一时刻 τ_i 处的速度 $u(\tau_i)$去近似地代替这段时间内各时刻的速度，则在时间间隔$[t_{i-1},t_i]$内物体所走路程 ΔS_i 可以用 $u(\tau_i)\Delta t_i$ 作为它的近似值：

$$\Delta S_i\approx u(\tau_i)\Delta t_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

(3) 求和。把上面这些近似值加起来，就得到整个时间间隔$[T_1,T_2]$内所走路程 S 的近似值：

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\approx\sum_{i=1}^{n}u(\tau_i)\Delta t_i$$

(4) 取极限。一般地，当区间$[T_1,T_2]$分得越细时，上面的近似程度就越精确。记$\lambda=\max\{\Delta t_1,\Delta t_2,\cdots,\Delta t_n\}$，如果把区间$[a,b]$无限细分，即当$\lambda\to 0$时，和式$\sum_{i=1}^{n}u(\tau_i)\Delta t_i$的极限就是路程$S$的精确值，即

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}u(\tau_i)\Delta t_i$$

3.5.2 定积分的概念

从前述两个引例可看出，所要计算的量，即曲边梯形的面积与变速直线运动的路程的实际意义虽然不同，前者是几何量，后者是物理量，但是它们都决定于一个函数及其自变量的变化区间，例如：

(1) 曲边梯形的高$f(x)$及其底边上的点x的变化区间$[a,b]$；

(2) 直线运动的速度$u=u(t)$及时间t的变化区间$[T_1,T_2]$。

其实计算这些量的方法与步骤都是相同的。抓住这些量在数量关系上的共同的本质与特性加以概括，可得下述定积分的定义。

定义 3-5-1 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有界，用点$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_i<\cdots<x_n=b$把区间$[a,b]$分为$n$个小区间：$[x_0,x_1]$，$[x_1,x_2]$，…，$[x_{i-1},x_i]$，…，$[x_{n-1},x_n]$，各个小区间的长度为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,3,\cdots,n)$。在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点$\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$，作乘积$f(\xi_i)\Delta x_i(i=1,2,\cdots,n)$，并作和式$S_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$（也称为积分和），当$n\to\infty$时，$\Delta x_i$中最大者$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$趋向于零，$S_n$的极限存在，且极限值与区间$[a,b]$的划分方法及点$\xi_i$的取法无关，则称函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，称此极限值为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的**定积分**，记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中，$f(x)$称为**被积函数**，$[a,b]$称为**积分区间**；a称为**积分下限**，b称为**积分上限**，x称为**积分变量**，$f(x)\mathrm{d}x$称为**被积表达式**。

有了定积分的概念，上面所讨论的实例可以用定积分来表示了。

(1) 曲边梯形的面积S是它的曲边方程$y=f(x)(f(x)\geqslant 0)$在区间$[a,b]$上的定积分，即

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(2) 物体运动所经过的路程S是速度函数$u=u(t)$在区间$[T_1,T_2]$上的定积分，即

$$S=\int_{T_1}^{T_2}u(t)\mathrm{d}t$$

注：

(1) 定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是一个确定的常数。它只与被积函数$f(x)$和积分区间$[a,b]$有关，而与积分变量字母的选取无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

(2) 定积分的定义中,下限 a 总是小于上限 b 的,为了今后使用方便,我们规定:

① 当 $a>b$ 时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$;

② 当 $a=b$ 时,$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$。

(3) 可以证明:如果 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积,则 $f(x)$在区间$[a,b]$上有界,即函数 $f(x)$有界是其可积的必要条件。通常在闭区间上的连续函数总是可积的,若 $f(x)$在区间$[a,b]$上有界,且只有有限个间断点,则 $f(x)$在$[a,b]$上可积。

3.5.3　定积分的几何意义

如果 $x\in[a,b]$时,$y=f(x)$连续,则定积分的几何意义分以下 3 种情况:

(1) $f(x)\geqslant 0$,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示曲边梯形的面积;

(2) $f(x)<0$,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示曲边梯形的面积的负值;

(3) 如果 $f(x)$在$[a,b]$上有正有负时,如图 3-5-3 所示,那么积分值就等于曲线 $y=f(x)$在 x 轴上方部分与下方部分面积的代数和,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = S_1 - S_2 + S_3$$

例 3-5-1　利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$。

解　如图 3-5-4 所示,把区间$[0,1]$分成 n 等份,分点和小区间长度为

$$x_i = \frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n-1),\quad \Delta x_i = \frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$$

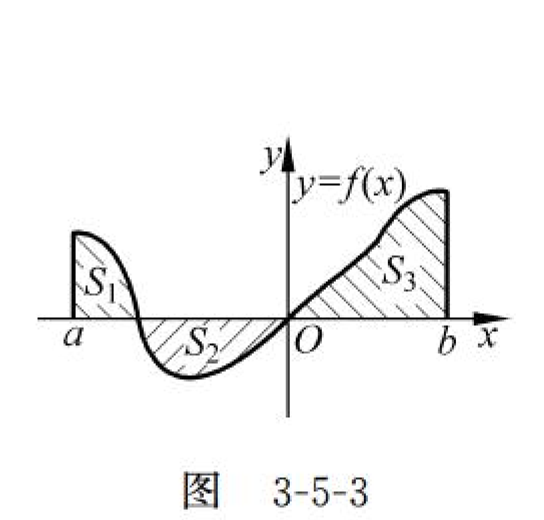


图　3-5-3

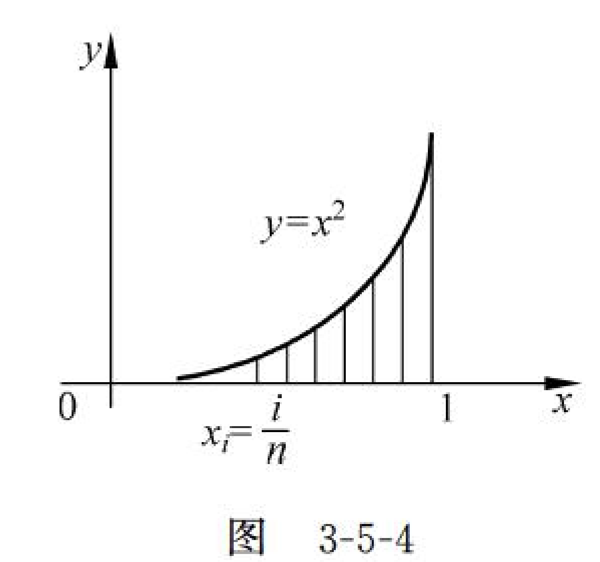


图　3-5-4

取 $\xi_i=x_i(i=1,2,\cdots,n)$,于是,得和式

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^n \xi_i^2\Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\ &= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

因为 $\lambda=\dfrac{1}{n}$，当 $\lambda\to 0$ 时，$n\to\infty$，所以

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

3.5.4 定积分的性质

定积分具有下述性质，其中所涉及的函数在积分区间上都是可积的。

性质 3-5-1 两个函数代数和的定积分等于它们的定积分的代数和，即

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

这一结论可以推广到任意有限多个函数代数和的情况。

性质 3-5-2 被积函数中的常数因子可以提到积分号前面，即

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

性质 3-5-3 对于任意点 c，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

这一性质称为定积分的区间可加性。应注意，c 的任意性意味着，不论 $c\in[a,b]$，还是 $c\notin[a,b]$，这一性质均成立。

性质 3-5-4 如果被积函数 $f(x)\equiv 1$，则

$$\int_a^b 1\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x=b-a$$

性质 3-5-5 如果在区间 $[a,b]$ 上，恒有 $f(x)\geqslant 0$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0\quad(a<b)$$

推论 3-5-1 如果在区间 $[a,b]$ 上，恒有 $f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\quad(a<b)$$

推论 3-5-2 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\quad(a<b)$

证明 因为

$$-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|$$

由推论 3-5-1 及性质 3-5-2 可得

$$-\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

证毕。

性质 3-5-6 设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值，则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$$

性质 3-5-7(积分中值定理)　如果函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则在区间$[a,b]$内至少存在一点 ξ,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \qquad (a<\xi<b)$$

其几何意义为:由曲线 $y=f(x)$及直线 $x=a$,$x=b$ 和 x 轴所围曲边梯形的面积等于以区间$[a,b]$为底,以$[a,b]$内某点 ξ 处的函数值 $f(\xi)$为高的矩形的面积,如图 3-5-5 所示。

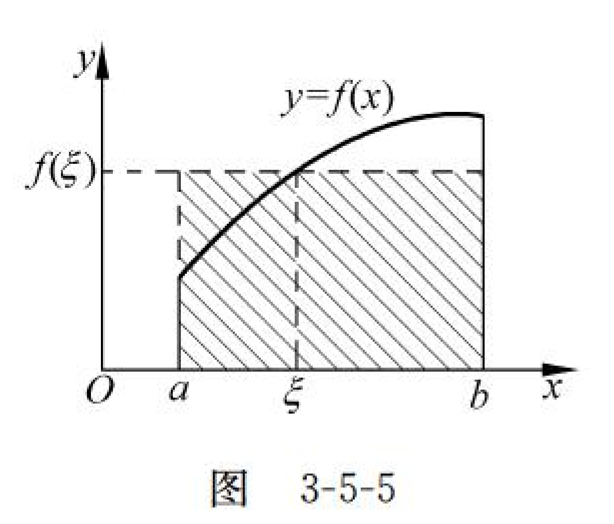


图　3-5-5


一般地,有积分中值定理得到的数值

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

称为函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的平均值。

习题 3-5

1. 利用定积分的几何意义计算下列积分。

(1) $\int_0^1 2x\mathrm{d}x$　　(2) $\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^{2\pi} \cos x\mathrm{d}x$　　(4) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\mathrm{d}x$

2. 从几何意义上来理解定积分 $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$。

3. 利用定积分的性质,说明下列各对积分哪一个值较大。

(1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x, \int_0^1 x^3\mathrm{d}x$　　(2) $\int_1^2 x^2\mathrm{d}x, \int_1^2 x^3\mathrm{d}x$

(3) $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x, \int_1^2 (\ln x)^2\mathrm{d}x$　　(4) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x, \int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x$

3.6　微积分基本公式

3.6.1　变上限的定积分

设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,若仅考虑定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,则它是一个定数。若固定下限,让上限在区间$[a,b]$上变动,即取 x 为区间$[a,b]$上的任意一点,由于 $f(x)$在$[a,b]$上连续,因而在$[a,x]$上也连续,所以 $f(x)$在$[a,x]$上也可积,定积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 的值依赖上限 x,如图 3-6-1 所示,因此定积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\,(a\leqslant x\leqslant b)$ 是上限 x 的一个函数,称它为**变上限的定积分**,记作

图　3-6-1

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad x\in[a,b]$$

变上限的定积分 $\Phi(x)$ 具有下面重要的性质。

定理 3-6-1 如果函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，则积分上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

在$[a,b]$上可导，且 $\Phi(x)$ 的导数等于被积函数在积分上限 x 处的值，即

$$\Phi'(x)=\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]'=f(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

即 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 就是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的一个原函数。

***证明** 设给 x 以增量 Δx，则函数 $\Phi(x)$ 的相应增量为

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)&=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由定积分的中值定理有

$$\Delta\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)\Delta x$$

其中，ξ 在 x 和 $x+\Delta x$ 之间，用 Δx 除上式两端得

$$\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=f(\xi)$$

由于假设 $y=f(x)$ 在$[a,b]$上连续，而 $\Delta x\to 0$，即 $\xi\to x$，此时 $f(\xi)\to f(x)$。

令 $\Delta x\to 0$，对上式两端取极限即可得到 $\Phi'(x)=f(x)$。

由定理 3-6-1 可知，积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是连续函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上的一个原函数（且仍是连续函数），即

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]=f(x)$$

例 3-6-1 求 $\Phi(x)=\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t$ 在 $x=0, x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 处的导数。

解 因为
$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t=\sin x^2$$

故

$$\Phi'(0)=\sin 0=0$$

$$\Phi'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

例 3-6-2 求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_1^{x^3}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right]$。

解 由于 $\int_1^{x^3}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$ 是 x^3 的函数，因而是 x 的复合函数，令 $u=x^3$，则有

$$\Phi(u)=\int_1^u \mathrm{e}^t\mathrm{d}t,\quad u=x^3$$

根据复合函数的求导公式，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_1^{x^3}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\Phi(u)]=\Phi'(u)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^u\cdot 3x^2=3x^2\mathrm{e}^{x^3}$$

例 3-6-3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{2x}^{0}\sin t^2\mathrm{d}t}{x^3}$。

解 这是一个$\dfrac{0}{0}$型未定式，利用洛必达法则，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\int_{2x}^{0}\sin t^2\mathrm{d}t}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-\int_0^{2x}\sin t^2\mathrm{d}t\right)'}{(x^3)'}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(2x)^2\cdot(2x)'}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 4x^2}{3x^2}\\&=-\frac{8}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x^2}{4x^2}=-\frac{8}{3}\end{aligned}$$

3.6.2 微积分基本定理

定理 3-6-2 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

上述公式称为**牛顿—莱布尼茨公式**，也称为微积分基本公式。

证明 由定理 3-6-1 知，$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，又知 $F(x)$也是 $f(x)$的一个原函数，因为两个原函数之间仅相差一个常数，所以

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)+C\quad(a\leqslant x\leqslant b)$$

在上式中，令 $x=a$ 可得 $C=-F(a)$，代入上式得

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a)$$

再令 $x=b$，并把积分变量 t 换成 x，便得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

证毕。

定理 3-6-2 称为微积分基本定理，它揭示了定积分与不定积分的内在联系，从而把定积分的计算问题转化为不定积分的计算问题。

通常把 $F(b)-F(a)$记作$[F(x)]_a^b$，于是牛顿—莱布尼茨公式可写成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b$$

例 3-6-4 求定积分 $\int_{-1}^{1}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$。

解 由于 $\arctan x$ 是$\dfrac{1}{1+x^2}$的一个原函数，所以

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=[\arctan x]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

例 3-6-5 求定积分 $\int_0^1 (x^2-2)\mathrm{d}x$。

解 $$\int_0^1 (x^2-2)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x - \int_0^1 2\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - [2x]_0^1 = -\frac{5}{3}$$

例 3-6-6 求定积分 $\int_0^\pi \sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$。

解 $$\int_0^\pi \sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sqrt{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^\pi |\cos x|\,\mathrm{d}x$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x + \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\cos x)\mathrm{d}x$$
$$= \sqrt{2}\,[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2}\,[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = 2\sqrt{2}$$

例 3-6-7 求定积分 $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\leqslant x<1 \\ \mathrm{e}^x & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$。

解 $$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^3 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 + [\mathrm{e}^x]_1^3 = \frac{2}{3} + \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}$$

注：当被积函数为分段函数或含绝对值符号时，应利用定积分的可加性把积分区间分为若干个子区间，或者在不同的区间上被积函数的表达式不相同时，把它拆分成几个定积分之和，使每个定积分都满足使用牛顿—莱布尼茨公式计算的条件。

习题 3-6

1. 计算下列定积分。

(1) $\int_1^2 \frac{2}{x}\mathrm{d}x$　　(2) $\int_0^3 \sqrt{3-x}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^1 x^{100}\mathrm{d}x$　　(4) $\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

(5) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$　　(6) $\int_0^1 100^x\mathrm{d}x$

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$　　(8) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x+\pi)\mathrm{d}x$　　(10) $\int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$

(11) $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{2x}\mathrm{d}x$　　(12) $\int_0^\pi \sqrt{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

(13) $\int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x$　　(14) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

2. 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t}{x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x t\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$

3. 若 $f(x)$连续,求 $F'(x)$。

(1) $F(x)=\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$ (2) $F(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$

3.7 定积分的换元积分法与分部积分法

由微积分基本公式知道,求定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的问题可以转化为求被积函数 $f(x)$的原函数在区间$[a,b]$上的增量的问题,从而求不定积分时应用的换元法与分部积分法在求定积分时仍适用。本节将具体讨论这些方法,请注意与不定积分的差异。

3.7.1 定积分的换元积分法

定理 3-7-1 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,如果函数 $x=\varphi(t)$满足下列条件:

(1) 当 $t=\alpha$ 时,$x=\varphi(\alpha)=a$,当 $t=\beta$ 时,$x=\varphi(\beta)=b$;

(2) 当 t 在$[\alpha,\beta]$上变化时,$x=\varphi(t)$的值在$[a,b]$上变化;

(3) $\varphi'(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续,

则有换元积分公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

证明 由假设知,$f(x)$在区间$[a,b]$上是连续的,因而 $f(x)$在区间$[a,b]$上是可积的;$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$在区间$[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$)上也是连续的,因而是可积的。设 $f(x)$的一个原函数为 $F(x)$,由牛顿—莱布尼茨公式,有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

另一方面,因为 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$在区间$[\alpha,\beta]$上可积,其原函数为 $F[\varphi(t)]$,这是因为

$$(F[\varphi(t)])'=F'[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$$

因此,有

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t&=[F[\varphi(t)]]_\alpha^\beta\\&=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]\\&=F(b)-F(a)\end{aligned}$$

于是,有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

证毕。

注:

(1) 这个公式与不定积分的换元积分公式很类似,从左到右使用这个公式时,相当于不定积分的第二类换元法;从右到左使用这个公式时,相当于不定积分的第一类换元法。

(2) 使用定积分换元积分公式时须注意**换元必换限**。

例 3-7-1 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\mathrm{d}x$。

解 令 $\sin x=t$，当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=\frac{\pi}{2}$时，$t=1$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\mathrm{d}x=\int_0^1 t^3\mathrm{d}t=\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

例 3-7-2 求定积分 $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\mathrm{d}x$。

解 令 $\sqrt{5-4x}=t$，即 $x=\frac{5-t^2}{4}$，$\mathrm{d}x=-\frac{t}{2}\mathrm{d}t$。当 $x=-1$ 时，$t=3$；当 $x=1$ 时，$t=1$，则

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\mathrm{d}x=\int_3^1 \frac{5-t^2}{4t}\cdot\left(-\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$$
$$=\int_3^1 \frac{t^2-5}{8}\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{24}t^3-\frac{5}{8}t\right]_3^1=\frac{1}{6}$$

例 3-7-3 求定积分 $\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}}\mathrm{d}x$。

解 令 $t=\ln x$，则 $\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$。当 $x=1$ 时，$t=0$；当 $x=\mathrm{e}^2$ 时，$t=2$，则

$$\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}}\mathrm{d}x=\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t+1}}\mathrm{d}t=\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t+1}}\mathrm{d}(t+1)$$
$$=2\left[(t+1)^{\frac{1}{2}}\right]_0^2=2(\sqrt{3}-1)$$

例 3-7-4 求定积分 $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$。

解 令 $x=2\sin t$，则 $\mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$。当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=2$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$，则

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t\cdot 2\cos t\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\mathrm{d}t$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\left[2t+\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

例 3-7-5 求定积分 $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$。

解 令 $t=-x^2$，则 $\mathrm{d}t=-2x\mathrm{d}x$。当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=1$ 时，$t=-1$，则

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^{-1}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^t\right]_0^{-1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

例 3-7-6 求定积分 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$。

解
$$\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x(1-\sin^2 x)}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x}\,|\cos x|\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}(\sin x)-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}(\sin x)$$

$$= \left[\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4}{3}$$

例 3-7-7 证明：设 $f(x)$在区间$[-a,a]$上连续$(a>0)$，则

（1）当 $f(x)$为偶函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$；

（2）当 $f(x)$为奇函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$。

证明 因为$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$，对于等号右端的第一项，令 $x=-t$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$。当 $x=-a$ 时，$t=a$；当 $x=0$ 时，$t=0$，则

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 } x=-t} -\int_a^0 f(-t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(-t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(-x)\mathrm{d}x$$

于是，当 $f(x)$为偶函数时，

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(-x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^a [f(-x)+f(x)]\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} 2f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

当 $f(x)$为奇函数，则 $f(-x)+f(x)=0$，从而得

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(-x)+f(x)]\mathrm{d}x = 0$$

证毕。

本例的结果可以作为定理使用，在计算对称区间上的定积分时，如果能判定被积函数的奇偶性，利用这一结果可使计算简化。

例 3-7-8 求定积分 $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$。

解 因为被积函数 $x\mathrm{e}^{x^2}$ 是奇函数，所以

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = 0$$

3.7.2 定积分的分部积分法

定理 3-7-2 $u=u(x)$与 $v=v(x)$在区间$[a,b]$上有连续导函数 $u'(x)$，$v'(x)$，则

$$(uv)' = u'v + uv'$$

在上式两端取区间$[a,b]$上的定积分 ，有

$$\int_a^b (uv)'\mathrm{d}x = \int_a^b u'v\mathrm{d}x + \int_a^b uv'\mathrm{d}x$$

即

$$[uv]_a^b = \int_a^b v\mathrm{d}u + \int_a^b u\mathrm{d}v$$

移项得

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$$

上述公式称为**定积分的分部积分公式**。

例 3-7-9 求定积分 $\int_1^3 \ln x\mathrm{d}x$。

解
$$\int_1^3 \ln x\mathrm{d}x = [x\ln x]_1^3 - \int_1^3 x\mathrm{d}(\ln x) = [x\ln x]_1^3 - \int_1^3 \frac{x}{x}\mathrm{d}x$$
$$= 3\ln 3 - 0 - [x]_1^3 = 3\ln 3 - 2$$

例 3-7-10 求定积分 $\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$。

解
$$\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = [x^2\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}(x^2)$$
$$= \mathrm{e} - 0 - 2\int_0^1 \mathrm{e}^x \cdot x\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2\int_0^1 x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$$
$$= \mathrm{e} - [2x\cdot\mathrm{e}^x]_0^1 + 2\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2\mathrm{e} + 2[\mathrm{e}^x]_0^1$$
$$= -\mathrm{e} + 2\mathrm{e} - 2 = \mathrm{e} - 2$$

例 3-7-11 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos x\mathrm{d}x$。

解
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$$
$$= [\mathrm{e}^x\cdot\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\mathrm{d}(\cos x) = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$$
$$= -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = -1 + [\mathrm{e}^x\cdot\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\mathrm{d}(\sin x)$$
$$= -1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$$

移项得
$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - 1$$

所以
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - 1)$$

例 3-7-12 求定积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$。

解 令 $t=\sqrt{x}$，则 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$。当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=1$ 时，$t=1$，则
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \mathrm{e}^t t\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t\mathrm{d}(\mathrm{e}^t)$$
$$= 2[t\mathrm{e}^t]_0^1 - 2\int_0^1 \mathrm{e}^t\mathrm{d}t = 2\mathrm{e} - 2[\mathrm{e}^t]_0^1 = 2$$

习题 3-7

计算下列定积分。

(1) $\int_0^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x$　　(2) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$　　(4) $\int_0^a \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x \quad (a>0)$

(5) $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　(6) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$

(7) $\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x \mathrm{d}x$　　(8) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$

(9) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^8 \sin x \mathrm{d}x$　　(10) $\int_{-1}^{1} \frac{2 + x\cos x}{\sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x$

3.8　反常积分

前面讨论的定积分有两个限制：积分区间有限与被积函数有界。这类定积分称为**常义积分**。实际问题需要突破这两种限制，即积分区间是无穷区间或被积函数无界，这一类积分称为**反常积分**或**广义积分**。

3.8.1　无穷限的反常积分

定义 3-8-1　设函数 $f(x)$ 在无限区间 $[a, +\infty)$ 上连续，取 $b > a$，如果极限 $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的**无穷积分**，记作 $\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

这时也称无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ **收敛**；如果上述极限不存在，就称无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ **发散**。

类似地，可以定义函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 和 $(-\infty, +\infty)$ 上的无穷积分：

$$\int_{-\infty}^{b} f(x) \mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \quad (a < b)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x) \mathrm{d}x + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b f(x) \mathrm{d}x$$

无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow \lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x) \mathrm{d}x$ 与 $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_0^b f(x) \mathrm{d}x$ 都存在。

上述积分统称为无穷限的反常积分。

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，记 $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$，$F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$，则无穷限的反常积分可以表示为(如果极限存在)：

$$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x = F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x) \mathrm{d}x = F(x) \Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x = F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty)$$

例 3-8-1　求无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2} \mathrm{d}x$。

解 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=[\arctan x]_{-\infty}^{+\infty}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\arctan x-\lim_{x\to-\infty}\arctan x$$
$$=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

例 3-8-2 讨论无穷积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性。

解 因为$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=[2\sqrt{x}]_{1}^{+\infty}=+\infty$，所以，此无穷积分发散。

例 3-8-3 求无穷积分 $\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x(a>0)$。

解 $$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}(-ax)$$
$$=-\frac{1}{a}[\mathrm{e}^{-ax}]_{0}^{+\infty}=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{0}=\frac{1}{a}$$

例 3-8-4 讨论无穷积分 $\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x(a>0)$ 的敛散性。

解 当 $p=1$ 时，$\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=[\ln x]_{a}^{+\infty}=+\infty$。

当 $p<1$ 时，$\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right]_{a}^{+\infty}=+\infty$。

当 $p>1$ 时，$\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right]_{a}^{+\infty}=\frac{a^{1-p}}{p-1}$。

综上所述，当 $p>1$ 时，此无穷积分收敛，其值为$\frac{a^{1-p}}{p-1}$；当 $p\leqslant1$ 时，此无穷积分发散。

**3.8.2 无界函数的反常积分

另一类反常积分就是无界函数的积分问题。

如果函数 $f(x)$在点 a 的任一邻域内都无界，那么点 a 称为函数 $f(x)$的**瑕点**，也称为**无界间断点**。无界函数的反常积分又称为**瑕积分**。

定义 3-8-2 设函数 $f(x)$在区间$(a,b]$上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$，即点 a 为 $f(x)$的瑕点，取 $t>0$，则函数 $f(x)$在$(a,b]$上的反常积分定义为

$$\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b}f(x)\mathrm{d}x$$

如果极限 $\lim\limits_{t\to a^+}\int_{t}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此反常积分**收敛**；否则称此反常积分**发散**。

类似地，函数 $f(x)$在$[a,b)$（b 为瑕点）上的反常积分定义为

$$\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to b^-}\int_{a}^{t}f(x)\mathrm{d}x$$

如果极限 $\lim\limits_{t\to b^-}\int_{a}^{t}f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此反常积分**收敛**；否则称此反常积分**发散**。

函数 $f(x)$在$[a,c)\cup(c,b]$（c 为瑕点）上的反常积分定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

如果极限 $\lim\limits_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 和极限$\lim\limits_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$ 都存在，则称此反常积分**收敛**；否则称此反常积分**发散**。

反常积分的计算方法如下。

如果 $F(x)$为 $f(x)$的原函数，则：

（1）当 a 是瑕点时，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+}[F(x)]_t^b = F(b) - \lim_{t\to a^+}F(t) = F(b) - \lim_{x\to a^+}F(x)$$

可采用如下简记形式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - \lim_{x\to a^+}F(x)$$

（2）当 b 为瑕点时，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = \lim_{x\to b^-}F(x) - F(a)$$

（3）当 $c(a<c<b)$为瑕点时，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = [\lim_{x\to c^-}F(x) - F(a)] + [F(b) - \lim_{x\to c^+}F(x)]$$

例 3-8-5　求反常积分$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$。

解　因为$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$，所以点 1 为被积函数的瑕点。

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = [\arcsin x]_0^1 = \lim_{x\to 1^-}\arcsin x - 0 = \frac{\pi}{2}$$

例 3-8-6　讨论反常积分$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 的收敛性。

解　因为函数$\frac{1}{x^2}$在区间$[-1,1]$上除 $x=0$ 外连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$，所以点 0 为被积函数的瑕点，由定义有

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

由于$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^0 = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{x}\right)-1=+\infty$，即反常积分$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 发散，所以反常积分$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 发散。

习题 3-8

1. 计算无穷积分。

（1）$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-100x}\mathrm{d}x$　　　　（2）$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{100+x^2}$

*2. 计算广义积分$\int_0^6 (x-4)^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}x$。

*3. 如下解法是否正确？为什么？

$$\int_{-1}^{2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|\Big|_{-1}^{2}=\ln2-\ln1=\ln2$$

3.9 定积分在几何学及经济学上的应用

3.9.1 元素法

在定积分的应用中，经常采用**元素法**。为了说明这种方法，先回顾一下 3.5 节中讨论过的曲边梯形的面积问题。

设 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，由曲线 $y=f(x)$（$f(x)\geqslant0$）和直线 $x=a$，$x=b(a<b)$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积为 $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，则求此曲边梯形面积的步骤如下。

（1）分割。用分点将区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，相应地把曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形，第 i 个窄曲边梯形面积记为 ΔA_i（$i=1,2,\cdots,n$），则整个曲边梯形的面积为 $A=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta A_i$。

（2）代替。计算 ΔA_i 的近似值：$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i$（$i=1,2,\cdots,n$）。

（3）求和，得 A 的近似值：$A=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta A_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$。

（4）取极限，得 $A=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

显然，所求面积 A 与区间 $[a,b]$ 有关。如果把区间 $[a,b]$ 分成许多部分区间，则所求面积也相应分成许多部分面积 ΔA_i，而所求面积就等于所有部分面积之和 $A=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta A_i$。这一性质称为所求量（面积 A）对区间 $[a,b]$ 具有**可加性**。此外，用 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似代替部分量 ΔA_i 时，要求它们只相差一个比 Δx_i 高阶的无穷小，以使和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限是 A 的精确值，从而 A 可以表示为定积分：

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

在推导出 A 的积分表达式的 4 个步骤中，主要的是第 2 步，这一步是要确定 ΔA_i 的近似值 $f(\xi_i)\Delta x_i$，使得 $A=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

为了方便起见，省略下标 i，用 ΔA 表示任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上的窄曲边梯形的面积：

$$A=\sum\Delta A$$

取 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的左端点 x 为 ξ，以点 x 处的函数值 $f(x)$ 为高，以 $\mathrm{d}x$ 为底的矩形的面积 $f(x)\mathrm{d}x$ 为 ΔA 的近似值，即 $\Delta A\approx f(x)\mathrm{d}x$。上式右端 $f(x)\mathrm{d}x$ 称为**面积元素**，记作

$$dA = f(x)dx$$

于是
$$A \approx \sum f(x)dx$$

因此
$$A = \lim \sum f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

一般地，如果某一实际问题中的所求量 U 符合下列条件：

(1) U 是与一个变量 x 的变化区间 $[a,b]$ 有关的量；

(2) U 对于区间 $[a,b]$ 具有可加性，就是说，如果把区间 $[a,b]$ 分成许多部分区间，则 U 相应地分成许多部分量，而 U 等于所有部分量之和；

(3) 部分量 ΔU_i 的近似值可以表示为 $f(\xi_i)\Delta x_i$，

那么就可考虑用定积分来表达这个量 U。

通常写出这个量 U 的积分表达式的步骤如下。

(1) 根据问题的具体情况，选取一个变量例如 x 为积分变量，并确定它的变化区间 $[a,b]$。

(2) 把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，取其中一小区间并记作 $[x,x+dx]$，求出相应于这个小区间的部分量 ΔU 的近似值。若 $\Delta U \approx f(x)dx$，就把 $f(x)dx$ 称为 U 的元素，记作 dU，即 $dU = f(x)dx$。

(3) 以所求量 U 的元素 $dU = f(x)dx$ 为被积表达式，在区间 $[a,b]$ 上作积分，得

$$U = \int_a^b f(x)dx$$

这就是所求量 U 的积分表达式。

这种方法通常叫作**元素法**（或**微元法**）。下面我们将应用这个方法来讨论几何、物理中的一些问题。

3.9.2 定积分的几何应用

1. 平面图形的面积

1) 直角坐标情形

由定积分的定义知，由曲线 $y=f(x)$ $(f(x)\geqslant 0)$ 和直线 $x=a$，$x=b$ $(a<b)$，$y=0$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b y\,dx$$

当 $f(x)\leqslant 0$ 时，由曲线 $y=f(x)$，x 轴与直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的平面图形(图 3-9-1)的面积为

$$S = \int_a^b [0-f(x)]dx = -\int_a^b f(x)dx$$

当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正有负时，由曲线 $y=f(x)$，x 轴及直线 $x=a$，$x=b$(图 3-9-2)的面积为

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3$$

一般地，由曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 及直线 $x=a$，$x=b$ 所围平面图形的面积 S(图 3-9-3)

可以看成由曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$分别与直线 $x=a$，$x=b$，x 轴所围成的两个曲边梯形面积的差，即

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$$

对 $f(x)$，$g(x)$不全在 x 轴上方的情形（图 3-9-4），也有相应的结论。

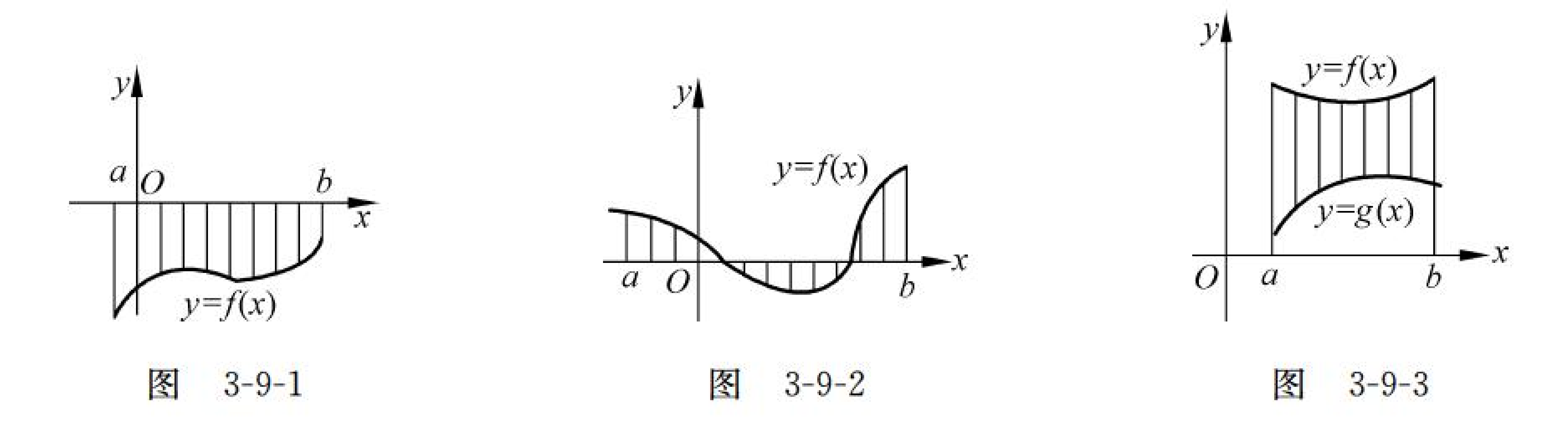


图 3-9-1　　图 3-9-2　　图 3-9-3

类似可得：由连续曲线 $x=\varphi(y)$，$x=\psi(y)$（$\varphi(y)\geqslant\psi(y)$）与直线 $y=c$，$y=d$ 所围成的平面图形的面积（图 3-9-5）为 $S=\int_c^d[\varphi(y)-\psi(y)]\mathrm{d}y$。

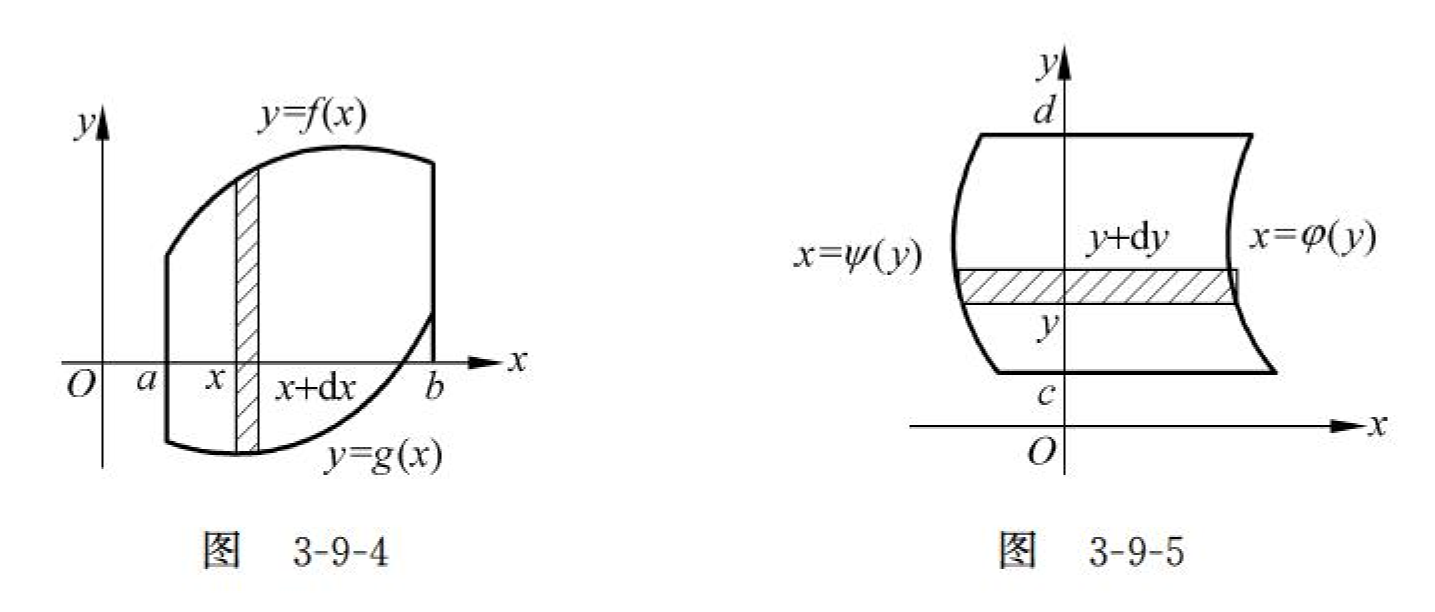


图 3-9-4　　图 3-9-5

例 3-9-1　计算两条抛物线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 所围成的面积。

解　如图 3-9-6 所示，先确定两条曲线交点的坐标。解方程组 $\begin{cases}y=x^2\\x=y^2\end{cases}$，得交点(0,0)和(1,1)。选取 x 为积分变量，则积分区间为[0,1]，因此所求的面积为

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}$$

例 3-9-2　计算由曲线 $y^2=x$ 与直线 $x+y=2$ 所围成的平面图形的面积。

解　如图 3-9-7 所示，先确定两条曲线交点的坐标。

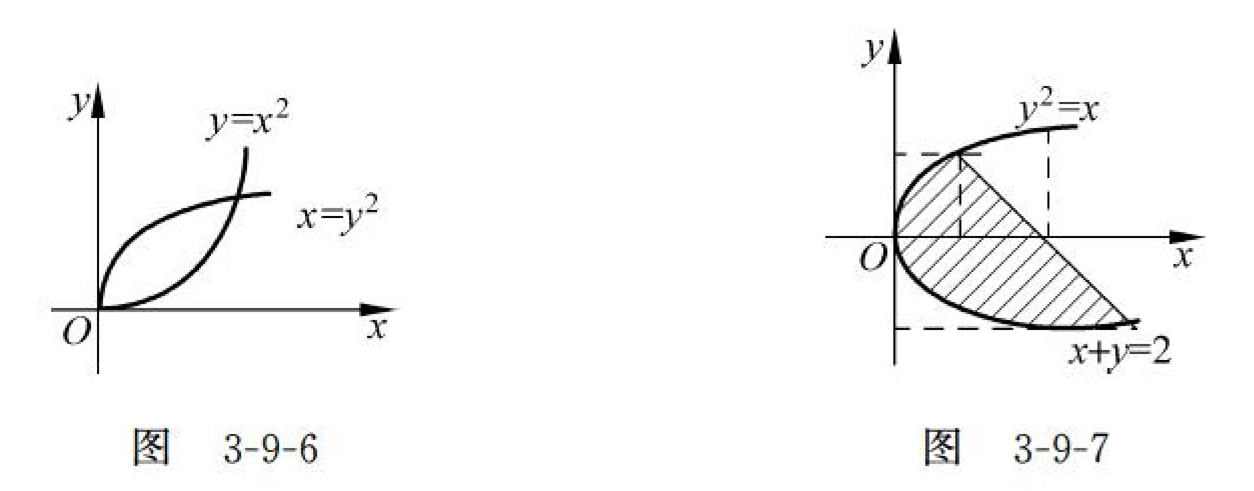


图 3-9-6　　图 3-9-7

解方程组$\begin{cases}y^2=x\\x+y=2\end{cases}$，得交点(1,1),(4,−2)。

将平面图形投影到 y 轴，则所求面积为

$$S=\int_{-2}^{1}[(2-y)-y^2]\mathrm{d}y=\left[2y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$$

例 3-9-3　计算椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成的面积。

解　如图 3-9-8 所示，此椭圆关于两坐标轴都对称，所以，所求的面积 S 为

$$S=4\int_0^a y\mathrm{d}x$$

应用定积分的换元积分法，令 $x=a\cos t$，则 $y=b\sin t$，$\mathrm{d}x=-a\sin t\mathrm{d}t$。当 $x=0$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$；当 $x=a$ 时，$t=0$，所以

$$S=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}b\sin t(-a\sin t)\mathrm{d}t=-4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=ab\pi$$

即椭圆的面积等于 πab。这也可以作为公式使用。

2）极坐标情形

对于某些平面图形，用极坐标来计算它们的面积比较方便。

设由曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ 围成一图形（简称为**曲边扇形**），现在要计算它的面积（图 3-9-9）。这里 $\rho(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且 $\rho(\theta)\geqslant 0$。

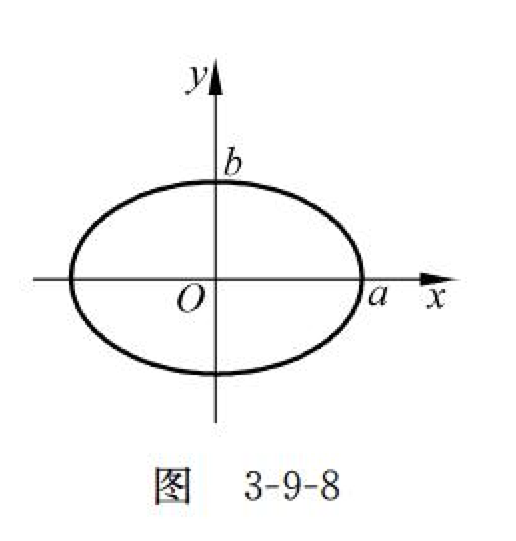


图　3-9-8

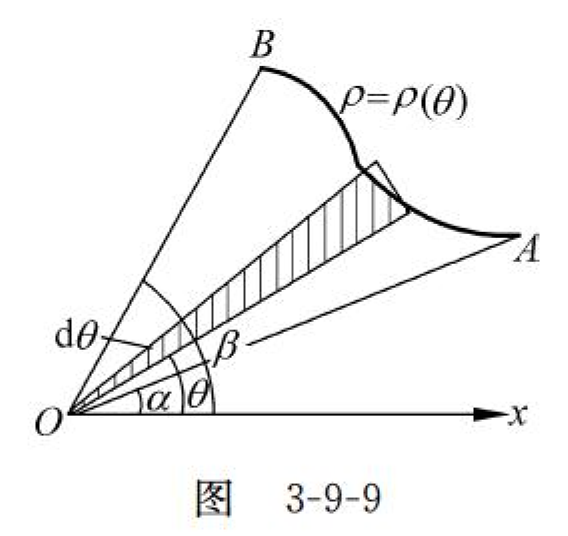


图　3-9-9

用元素法推导计算面积的公式。取极角 θ 为积分变量，它的变化区间为 $[\alpha,\beta]$，对应于任一小区间 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$ 的窄曲边扇形的面积可以用半径为 $\rho=\rho(\theta)$、中心角为 $\mathrm{d}\theta$ 的圆扇形的面积来近似代替，从而得到该窄曲边扇形面积的近似值，即曲边扇形的面积元素

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2\mathrm{d}\theta$$

从而得所求曲边扇形的面积为

$$S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2\mathrm{d}\theta$$

例 3-9-4　计算阿基米德螺线 $\rho=a\theta(a>0)$ 上对应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形（图 3-9-10）的面积。

解　所求图形的面积为

$$S=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(a\theta)^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}a^2\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{2\pi}=\frac{4}{3}a^2\pi^3$$

例 3-9-5 计算心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 所围成的图形的面积。

解 由于图形关于极轴对称(图 3-9-11)，所以所求面积为

$$\begin{aligned}S&=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta\\&=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta\\&=a^2\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta\right)\mathrm{d}\theta\\&=a^2\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi a^2\end{aligned}$$

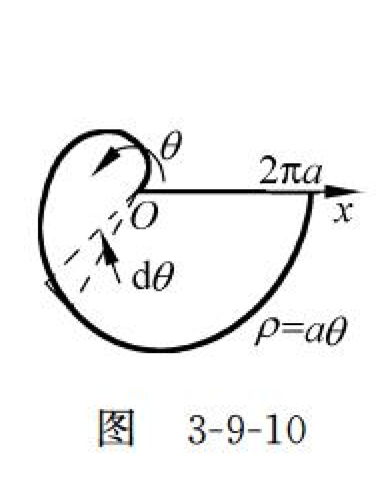


图 3-9-10

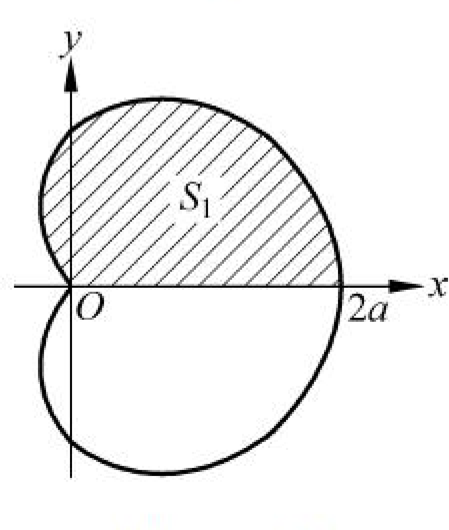


图 3-9-11

2. 体积

1）旋转体的体积

由曲线 $y=f(x)(f(x)\geqslant0)$，直线 $x=a$ 和 $x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形，绕 x 轴旋转一周而成的立体就是一个旋转体(图 3-9-12)。该旋转体的体积可用微元法求得。

在区间 $[a,b]$ 上任取一子区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，将该子区间上的旋转体视作底面积为 $\pi[f(x)]^2$、高为 $\mathrm{d}x$ 的薄圆柱，得体积微元

$$\mathrm{d}V=\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x=\pi y^2\mathrm{d}x$$

则旋转体的体积为

$$V=\pi\int_a^b y^2\mathrm{d}x=\pi\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x$$

类似可得，由连续曲线 $x=\varphi(y)(\varphi(y)\geqslant0)$，直线 $y=c$，$y=d$ 及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的立体(图 3-9-13)的体积为

$$V=\pi\int_c^d x^2\mathrm{d}y=\pi\int_c^d[\varphi(y)]^2\mathrm{d}y$$

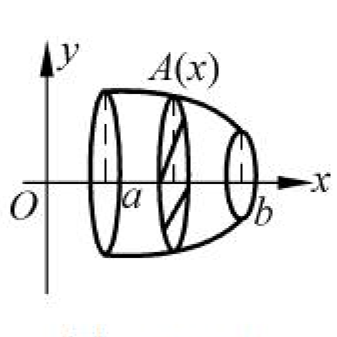


图 3-9-12

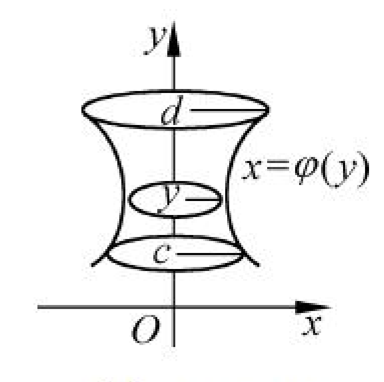


图 3-9-13

例 3-9-6 计算由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成的图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积。

解 该旋转椭球体可看作由上半椭圆 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转而成(图 3-9-14)。于是,其体积为

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2\mathrm{d}x=\pi\int_{-a}^{a}\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

例 3-9-7 计算由曲线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 绕 y 轴旋转而得的体积。

解 如图 3-9-15 所示,由$\begin{cases}y=x^2\\y^2=x\end{cases}$得$\begin{cases}y_1=0\\y_2=1\end{cases}$。

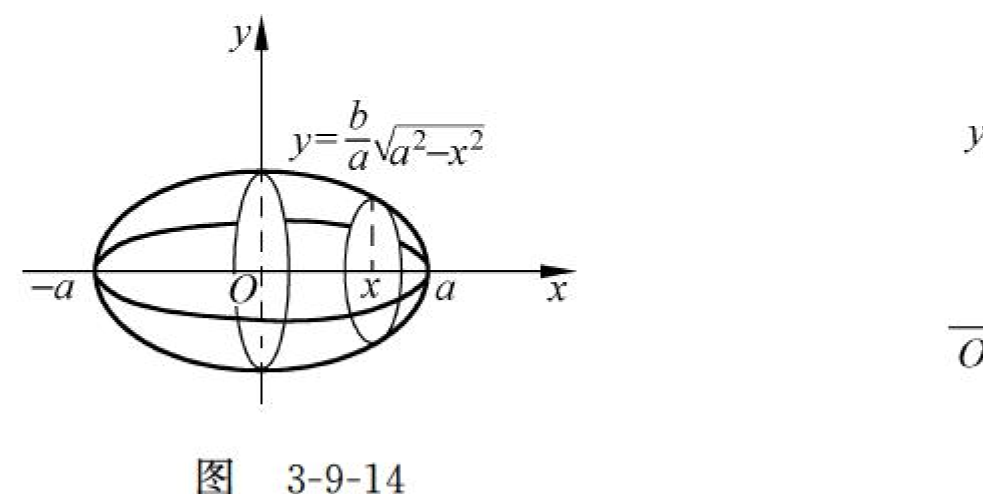


图 3-9-14

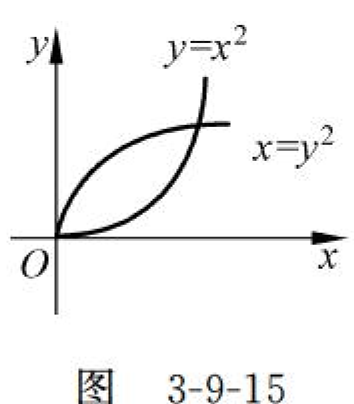


图 3-9-15

则
$$V=\int_0^1[\pi y-\pi(y^2)^2]\mathrm{d}y=\pi\int_0^1(y-y^4)\mathrm{d}y$$

$$=\pi\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^5}{5}\right]_0^1=\frac{3}{10}\pi$$

2) 平行截面为已知的立体的体积

设物体被垂直于某直线的平面所截得的面积已知,则可用定积分求该物体的体积。

不妨设上述直线为 x 轴,则在 x 处的截面面积 $A(x)$是 x 的已知连续函数,求该物体介于 $x=a$ 和 $x=b(a<b)$之间的体积(图 3-9-16)。

为了求体积,在微小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$上视 $A(x)$不变,即把$[x,x+\mathrm{d}x]$上的立体薄片近似看作以 $A(x)$为底,以 $\mathrm{d}x$ 为高的柱片,于是得体积元素 $\mathrm{d}V=A(x)\mathrm{d}x$。以 $A(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式,在 x 的变化区间$[a,b]$上作积分,便得所求立体的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$

例 3-9-8 设有底圆半径为 R 的圆柱,被一与圆柱面交成 α 角且过底圆直径的平面所截,求截下的楔形体的体积(图 3-9-17)。

解 取坐标系如图 3-9-17 所示,则底圆方程为 $x^2+y^2=R^2$。在 x 处垂直于 x 轴作立体的截面,得一直角三角形,两直角边分别为 y 及 $y\tan\alpha$,即 $\sqrt{R^2-x^2}$ 及 $\sqrt{R^2-x^2}\tan\alpha$,其面积为 $A(x)=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha$,从而得楔形体积为

$$V=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha\mathrm{d}x=\tan\alpha\int_0^R(R^2-x^2)\mathrm{d}x$$
$$=\tan\alpha\left[R^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^R=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$

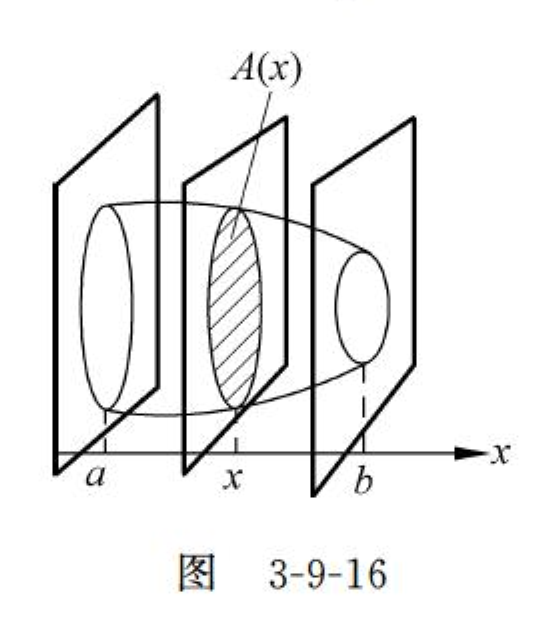


图 3-9-16

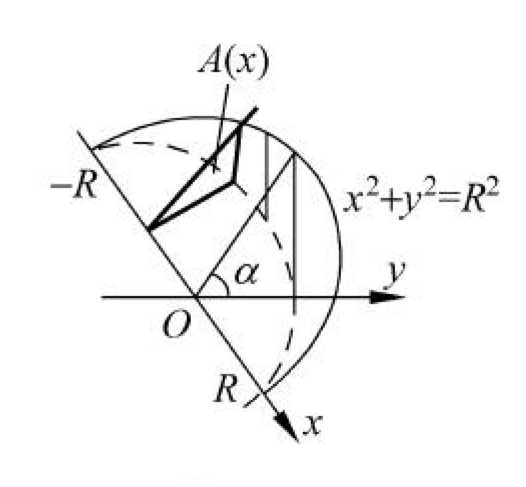


图 3-9-17

*3）平面曲线的弧长

设 A、B 是曲线弧上的两个端点，在弧 AB 上任取分点(图 3-9-18)：

$$A=P_0,P_1,P_2,\cdots,P_{n-1},P_n=B$$

并依次连接相邻的分点得一内接折线，当分点的数目无限增加且每个小段 $\overline{P_{i-1}P_i}\,(i=1,2,\cdots,n)$ 都缩向一点时，如果此折线的长 $\sum\limits_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i|$ 的极限存在，则称此极限为曲线弧 AB 的弧长，并称此曲线弧 AB 是可求长的。

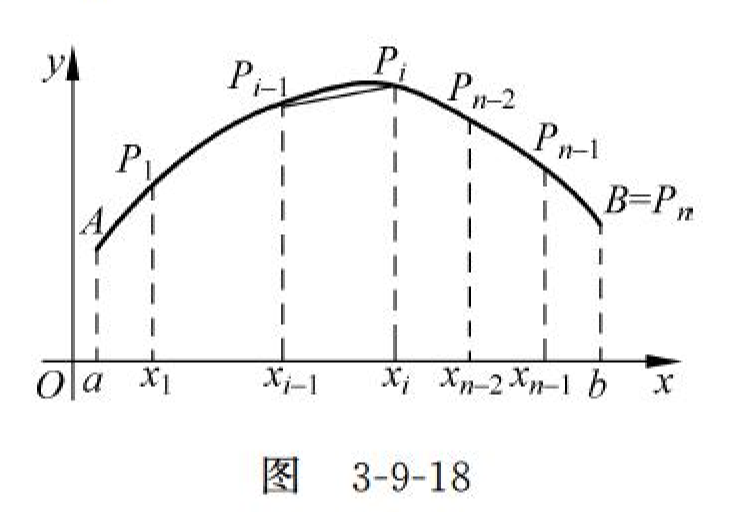


图 3-9-18

定理 3-9-1 光滑曲线弧是可求长的。

(1) 直角坐标情形。设曲线弧由直角坐标方程 $y=f(x)\,(a<x<b)$ 给出，其中 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上具有一阶连续导数，现在来计算此曲线弧的长度。

取横坐标 x 为积分变量，它的变化区间为$[a,b]$。曲线 $y=f(x)$ 上相应于$[a,b]$上任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的一段弧的长度，可以用该曲线在点$(x,f(x))$处的切线上相应的一小段的长度来近似代替，而切线上这相应的小段的长度为

$$\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

从而得弧长元素(即弧微分)为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

以 $\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$ 为被积表达式，在闭区间$[a,b]$上作定积分，便得所求的弧长为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

例 3-9-9 计算曲线 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 x 从 0 到 1 的一段弧的长度。

解 由于 $y'=x^{\frac{1}{2}}$，从而弧长元素

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$$

因此，所求弧长为

$$s=\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

（2）参数方程情形。设曲线弧由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$（$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$）给出，其中$\varphi(t)$、$\psi(t)$在$[a,b]$上具有连续导数，因为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$，$\mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t$，所以弧长元素为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\frac{\psi'^2(t)}{\varphi'^2(t)}}\,\varphi'(t)\mathrm{d}t=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

所求弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

例 3-9-10　计算曲线$\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$相对于$t$从0到$\pi$的一段弧的长度。

解　因为$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=at\cos t$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=at\sin t$，所以弧长元素为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{a^2t^2\cos^2t+a^2t^2\sin^2t}\,\mathrm{d}t=at\,\mathrm{d}t$$

所求弧长为

$$s=\int_0^\pi at\,\mathrm{d}t=\frac{a}{2}[t^2]_0^\pi=\frac{a}{2}\pi^2$$

例 3-9-11　计算半径为r的圆周长度。

解　圆的参数方程为$\begin{cases}x=r\cos t\\y=r\sin t\end{cases}$（$0\leqslant t\leqslant2\pi$）。因为$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-r\sin t$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=r\cos t$，所以所求弧长元素为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,\mathrm{d}t=r\mathrm{d}t$$

所求弧长为

$$s=\int_0^{2\pi}r\mathrm{d}t=2\pi r$$

（3）极坐标情形。设曲线弧由极坐标方程$\rho=\rho(\theta)$（$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$）给出，其中$\rho(\theta)$在$[a,b]$上具有连续导数，由直角坐标与极坐标的关系可得曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=\rho(\theta)\cos\theta\\y=\rho(\theta)\sin\theta\end{cases}\quad(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$$

于是得弧长元素为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

从而所求弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

例 3-9-12 计算阿基米德螺线 $\rho=a\theta(a>0)$ 对应于 θ 从 0 到 2π 的一段弧的长度。

解 因为弧长元素为

$$ds = \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}\,d\theta = a\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$$

因此，所求弧长为

$$S = \int_0^{2\pi} a\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta = \frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})\right]$$

例 3-9-13 计算对数螺线 $\rho=e^{a\theta}$ 对应于 θ 从 0 到 φ 的一段弧的长度。

解 因为弧长元素为

$$ds = \sqrt{(e^{a\theta})^2 + a^2(e^{a\theta})^2}\,d\theta = \sqrt{1+a^2}\,e^{a\theta}d\theta$$

因此，所求弧长为

$$S = \int_0^{\varphi}\sqrt{1+a^2}\,e^{a\theta}d\theta = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\left[e^{a\theta}\right]_0^{\varphi} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\varphi}-1)$$

3.9.3 经济应用问题举例

已知边际经济变量的变化率，求总量函数或总量函数在某个范围内的值时，可应用定积分进行计算。

例 3-9-14 设某产品在时刻 t 总产量的变化率 $f(t)=100+10t-0.3t^2$（kg/小时），求从 $t=1$ 到 $t=3$ 这两小时的总产量。

解 设总产量为 $Q(t)$，由已知条件 $Q'(t)=f(t)$，则知总产量 $Q(t)$ 是 $f(t)$ 的一个原函数，所以有

$$\Delta Q = \int_1^3 f(t)\,dt = \int_1^3 (100+10t-0.3t^2)\,dt$$
$$= \left[100t + 5t^2 - 0.1t^3\right]_1^3 = 237.4$$

即所求的总产量为 237.4kg。

例 3-9-15 生产某产品的边际成本为 $C'(x)=8x$（万元/百台），边际收入为 $R'(x)=100-2x$（万元/百台），其中 x 为产量，若固定成本为 10 万元，问：

(1) 产量为多少时，利润最大？

(2) 从利润最大时的产量再生产 2 百台，利润有什么变化？

解 (1) 边际利润

$$L'(x) = R'(x) - C'(x) = (100-2x) - 8x = 100 - 10x$$

令 $L'(x)=0$，得 $x=10$（百台）。

又 $x=10$ 是 $L(x)$ 的唯一驻点，根据问题的实际意义可知 $L(x)$ 存在最大值，故 $x=10$ 是 $L(x)$ 的最大值点，即当产量为 10（百台）时，利润最大。

(2) 利润的变化

$$\Delta L = \int_{10}^{12} L'(x)\,dx = \int_{10}^{12}(100-10x)\,dx$$
$$= (100x - 5x^2)\Big|_{10}^{12} = -20$$

即从利润最大时的产量再生产 2 百台，利润将减少 20 万元。

习题 3-9

1. 计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成的图形面积。

2. 计算由曲线 $y=\frac{r}{h}\cdot x$ 及直线 $x=0,x=h(h>0)$ 和 x 轴所围成的三角形绕 x 轴旋转而生成的立体的体积。

3. 计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形绕 y 轴旋转而成的立体体积。

*4. 计算由摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$ 的一拱与直线 $y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转而成的旋转体的体积。

*5. 计算摆线 $x=a(\theta-\sin\theta),y=a(1-\cos\theta)$ 的一拱 $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 的长度。

*6. 计算心脏线 $r=a(1+\cos\theta)(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 的弧长。

7. 已知某产品的边际成本为 $C'(x)=4x-3$（万元/百台），x 为产量（百台），固定成本为 18（万元），求最低平均成本。

3.10 定积分在物理学上的应用

3.10.1 变力沿直线所做的功

从物理学角度，如果物体在作直线运动的过程中有一个不变的力 F 作用在这物体上，且该力的方向与物体运动的方向一致，那么，在物体移动了距离 s 时，力 F 对物体所做的功为

$$W=Fs$$

如果物体在运动的过程中所受的力是变化的，就会遇到变力对物体做功的问题。下面通过具体例子说明如何计算变力所做的功。

例 3-10-1 把一个带 $+q$ 电量的点电荷放在 r 轴上坐标原点 O 处，它产生一个电场，这个电场对周围的电荷有作用力。由物理学知道，如果有一个单位正电荷放在这个电场中距离原点 O 为 r 的地方，那么电场对它的作用力的大小为

$$F=k\cdot\frac{q}{r^2}\ (k\text{ 是常数})$$

当这个单位正电荷在电场中从 $r=a$ 处沿 r 轴移动到 $r=b(a<b)$ 处时，计算电场力 F 对它所做的功。

解 如图 3-10-1 所示，在 r 轴上，当单位正电荷从 r 移动到 $r+\mathrm{d}r$ 时，电场力对它所做的功近似为 $k\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r$。

图 3-10-1

即功元素为

$$\mathrm{d}W=k\cdot\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r$$

于是，所求的功为

$$W=\int_a^b \frac{kq}{r^2}\mathrm{d}r = kq\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

例 3-10-2 一圆柱形的储水桶高为 5m，底圆半径为 3m，桶内盛满了水。试问要把桶内的水全部吸出须做多少功？

解 取深度 x(单位为 m)为积分变量，它的变化区间为 $[0,5]$，对应于 $[0,5]$ 上任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的一薄层水的高度为 $\mathrm{d}x$，若重力加速度 g 取 $9.8\mathrm{m/s^2}$，则这薄层水的重力为 $9.8\pi\cdot 3^2\mathrm{d}x\mathrm{kN}$。把这薄层水吸出桶外须做的功近似取为

$$\mathrm{d}W = 88.2\pi x\mathrm{d}x$$

此即功元素。于是，所求的功为

$$W=\int_0^5 88.2\pi x\mathrm{d}x = 88.2\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5$$

$$= 88.2\pi\cdot\frac{25}{2}\approx 3462(\mathrm{kJ})$$

例 3-10-3 若弹簧在拉伸过程中，需要的力为 $F(\mathrm{N})$，与伸长量 $s(\mathrm{cm})$ 成正比，即 $F=ks$，求将弹簧由原长拉伸 6cm 所做的功。

解 取 s 为积分变量，s 的变化区间为 $[0,6]$，功元素为

$$\mathrm{d}W = F\mathrm{d}s = ks\mathrm{d}s$$

因此，弹簧被拉伸了 6cm 时，外力所做的功为

$$W=\int_0^6 ks\mathrm{d}s = \frac{k}{2}\left[s^2\right]_0^6 = 18k(\mathrm{N}\cdot\mathrm{cm}) = 0.18k(\mathrm{J})$$

**3.10.2 水压力

从物理学角度，在水深为 h 处的压强为 $p=\rho gh$，这里 ρ 是水的密度，g 是重力加速度。如果有一面积为 A 的平板水平地放置在水深为 h 处，那么平板一侧所受的水压力为

$$P = pA$$

如果这个平板铅直放置在水中，那么由于水深不同的点处压强 p 不相等，所以平板所受水的压力就不能用上述方法计算，下面举例说明它的计算方法。

例 3-10-4 如图 3-10-2 所示为一管道的圆形闸门(半径为 3m)。问水平面齐及直径时，闸门所受到的水的静压力为多大？

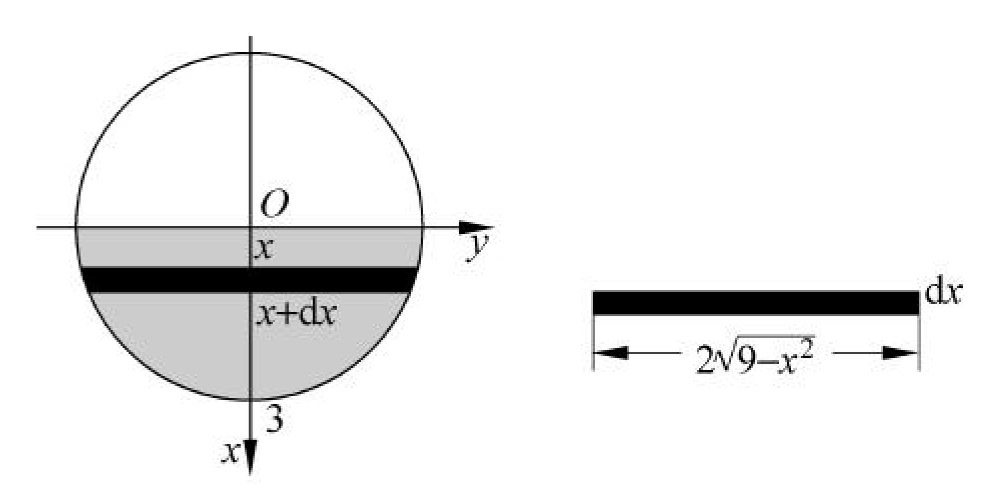


图 3-10-2

解 为方便起见，取 x 轴和 y 轴如图 3-10-2 所示，此时圆的方程为 $x^2+y^2=9(0\leqslant x\leqslant 3)$。取 x 为积分变量，且 $x\in[0,3]$，设 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 为 $[0,3]$ 上的任一小区间，当 $\mathrm{d}x$ 很小

时，由于压力函数是连续函数，所以，闸门上从深度 x 到 $x+\mathrm{d}x$ 这一狭条 ΔA 上所受的静压力可以近似地看成是相等的，都为 $\rho g x$。ΔA 的面积近似为 $2\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$，因此，$\Delta A$ 所受水压力的近似值，即压力元素为

$$\mathrm{d}P = 2\rho g x\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$$

由元素法得到闸门上所受的总压力为

$$P=\int_0^3 2\rho g x\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x = -\rho g\int_0^3 (9-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(9-x^2)$$

$$=-\rho g\left[\frac{2}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = 18\rho g$$

3.10.3 引力

从物理学知道，质量分别为 m_1,m_2，相距为 r 的两质点间的引力的大小为

$$F = G\cdot\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

其中，G 为引力系数，引力的方向为两质点连线的方向。

如果要计算一根细棒对一个质点的引力，那么由于细棒上各点与该质点的距离是变化的，且各点对该质点的引力的方向也是变化的，就不能用上述公式来计算，下面举例说明它的计算方法。

例 3-10-5 一根长为 l 的均匀细杆，质量为 M，在其中垂线上相距细杆为 a 处有一质量为 m 的质点。试求细杆对质点的万有引力。

解 如图 3-10-3 所示，细杆位于 x 轴上的 $\left[-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right]$，质点位于 y 轴上的点 a。任取细杆上的任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，当 $\mathrm{d}x$ 很小时可把这一小段细杆看作一质点，其质量元素为 $\mathrm{d}M=\frac{M}{l}\mathrm{d}x$。于是它对质点 m 的引力元素为

$$\mathrm{d}F = G\cdot\frac{m}{a^2+x^2}\cdot\frac{M}{l}\mathrm{d}x$$

图 3-10-3

由于细杆上各点对质点 m 的引力方向各不相同，因此不能直接对 $\mathrm{d}F$ 进行积分。为此，将 $\mathrm{d}F$ 分解到 x 轴和 y 轴两个方向上，得

$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\cdot\sin\theta,\quad \mathrm{d}F_y = -\mathrm{d}F\cdot\cos\theta$$

由于质点位于细杆的中垂线上，必使水平合力为零，即

$$F_x = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\mathrm{d}F_x = 0$$

又由 $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$，得垂线方向合力为

$$F_y=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\mathrm{d}F_y = -2\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{GmMa}{l}(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2GmMa}{l}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\left[\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right]_0^{\frac{l}{2}}=-\frac{2GmM}{a\sqrt{4a^2+l^2}}$$

其中，负号表示合力方向与 y 轴方向相反。

习题 3-10

1. 把弹簧拉长所需的力与弹簧的伸长成正比。已知 1N 的力能使弹簧伸长 1cm，问把弹簧拉长 10cm 要做多少功？

2. 在 x 轴上作直线运动的质点，在任意点 x 处所受的力为 $F(x)=1-e^{-x}$，试求质点从 $x=0$ 运动到 $x=2$ 处所做的功。

3. 在原点处有一带电量为 $+q$ 的点电荷，在它的周围形成了一个电场。现在 $x=a$ 处有一单位正电荷沿 x 轴正方向移动，若把该电荷称动至无穷远处，电场力要做多少功？

4. 设有一弹簧，假定被压缩 0.5cm 时需用力 1N(牛顿)，现弹簧在外力的作用下被压缩了 3cm，求外力所做的功。

5.（1）证明：把质量为 m 的物体从地球表面升高到 h 处所做的功是 $W=\frac{mgRh}{R+h}$，其中 g 是地面上的重力加速度，R 是地球的半径。

（2）一个人造地球卫星的质量为 173kg，在高于地面 630km 处进入轨道。问把这个卫星从地面送到 630km 的高空处，克服地球引力要做多少功？已知 $g=9.8\text{m/s}^2$，地球半径 $R=6370\text{km}$。

6. 一物体按规律 $x=ct^3$ 作直线运动，介质的阻力与速度的平方成正比。计算物体由 $x=0$ 移到 $x=a$ 时，克服介质阻力所做的功。

第4章

微分方程

函数是研究客观事物规律性的重要工具。如何寻求函数关系,在实践中具有重要意义。然而,在许多实际问题中,有时只能列出表示未知函数的导数(或微分)与自变量之间关系的等式,再从中求解得出所需的函数关系。这种关于导数(或微分)的等式,就是微分方程。本章主要介绍微分方程的一些基本概念和几种常见微分方程的解法。

4.1 微分方程的基本概念

4.1.1 两个实例

为了说明微分方程的有关基本概念,先来考察两个简单的例子。

例 4-1-1 一曲线通过点(1,2),且在该曲线上任一点 $M(x,y)$处的切线斜率等于该点横坐标平方的 3 倍,求该曲线的方程。

解 设所求曲线的方程为 $y=f(x)$,根据导数的几何意义,可知未知函数应满足以下公式:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2 \quad 或 \quad \mathrm{d}y=3x^2\mathrm{d}x \tag{4-1-1}$$

对式(4-1-1)两边同时积分,得

$$y=\int 3x^2\mathrm{d}x$$

即

$$y=x^3+C \tag{4-1-2}$$

其中,C 为任意常数。由于曲线通过点(1,2),或写成条件

$$y|_{x=1}=2 \tag{4-1-3}$$

将条件(4-1-3)代入式(4-1-2),得 $C=1$,于是所求曲线的方程为

$$y=x^3+1 \tag{4-1-4}$$

例 4-1-2 质量为 m 的物体，受重力作用自由下落，试求物体下落的距离随时间变化的规律。

解 设所求的下落距离关于时间的函数为 $s=s(t)$。选取坐标系使 s 轴铅直向下，原点在起点处。根据牛顿第二运动定律，未知函数应满足以下方程：

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g \tag{4-1-5}$$

由于自由落体的初始位移和初始速度均为零，未知函数 $s=s(t)$ 满足以下条件：

$$\begin{cases} s\big|_{t=0}=0 \\ \left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=0}=0 \end{cases} \tag{4-1-6}$$

对式(4-1-5)两端积分一次，得

$$\frac{ds}{dt}=gt+C_1 \tag{4-1-7}$$

再积分一次，得

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2 \tag{4-1-8}$$

其中，C_1，C_2 都是任意常数。将条件 $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=0$ 代入式(4-1-7)，得

$$C_1=0$$

将条件 $s|_{t=0}=0$ 代入式(4-1-8)，得

$$C_2=0$$

将 C_1，C_2 的值代入式(4-1-8)，得物体下落的距离随时间变化的规律为

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2 \tag{4-1-9}$$

上述两例中的关系式(4-1-1)和式(4-1-5)都含有未知函数的导数，由此引出微分方程的定义。

4.1.2 微分方程的基本概念

定义 4-1-1 含有未知函数的导数(或微分)的方程称为**微分方程**。例如，例 4-1-1 与例 4-1-1 中的式(4-1-1)和式(4-1-5)都是微分方程。微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为这个方程的阶。例如，例 4-1-1 中的式(4-1-1)是一阶微分方程，例 4-1-2 中的式(4-1-5)是二阶微分方程。而

$$y'''+x^4y''-y'=\sin 2x,\quad x^2y'''+(y')^6=x^5$$

都是三阶微分方程。

一般说，**n 阶微分方程**可写成

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

其中，x 为自变量，y 为未知函数。这里必须指出，在 n 阶微分方程中，$y^{(n)}$ 是必须出现的，而 $x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 等变量则可以不出现。例如，n 阶微分方程 $y^{(n)}+1=0$ 中，除 $y^{(n)}$ 外，

其他变量都没有出现。

定义 4-1-2　如果把某个函数 $y=\varphi(x)$代入微分方程后，能使方程成为恒等式，则函数 $y=\varphi(x)$称为该微分方程的**解**。例如，函数(4-1-2)和式(4-1-4)都是微分方程(4-1-1)的解，函数(4-1-8)和函数(4-1-9)都是微分方程(4-1-5)的解。

若微分方程的解中含有任意常数，且独立的任意常数的个数与方程的阶数相同，则称这样的解为微分方程的通解。如函数(4-1-2)和函数(4-1-8)分别是方程(4-1-1)和方程(4-1-5)的通解。

确定微分方程通解中的任意常数的值的条件，称为**初始条件**，如式(4-1-3)和式(4-1-6)。由初始条件确定了微分方程的通解中任意常数的值后所得到的解，称为**特解**。如函数(4-1-4)和函数(4-1-9)分别是方程(4-1-1)和方程(4-1-5)满足初始条件的特解。求微分方程满足初始条件的特解的问题，称为**初值问题**。

例 4-1-3　验证函数 $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$是方程 $y''-y'-6y=0$ 的通解。

解　由 $y'=-2C_1\mathrm{e}^{-2x}+3C_2\mathrm{e}^{3x}$得

$$y''=4C_1\mathrm{e}^{-2x}+9C_2\mathrm{e}^{3x}$$

将 y'，y''代入方程，得

$$\begin{aligned}y''-y'-6y&=(4C_1\mathrm{e}^{-2x}+9C_2\mathrm{e}^{3x})-(-2C_1\mathrm{e}^{-2x}+3C_2\mathrm{e}^{3x})-6(C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{3x})\\&=0\end{aligned}$$

所以，函数 $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$是方程 $y''-y'-6y=0$ 的解。又因为解中含有的任意常数的个数与方程的阶数相同，且 C_1，C_2 相互独立(即 C_1，C_2 不能合并)，所以函数 $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$是方程的通解。

习题 4-1

1. 指出下列等式中哪些是微分方程，并说明它们的阶数。

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3xy=2\sin x$　　(2) $y^2+3xy-2x^3=0$

(3) $5(y'')^2-y''+6y=0$　　(4) $y\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}y+x\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}x=0$

(5) $y'''=3xy^2-1$　　(6) $\mathrm{d}y=(1+x^2)\mathrm{d}x$

2. 判断下列各函数是否是所给微分方程的解。如果是，指出是通解还是特解(其中 C_1，C_2 为任意常数)。

(1) $y''+4y=0$，$y=C_1\sin(2x+C_2)$　　(2) $x^2y''-2y=x$，$y=x^2-\dfrac{x}{2}$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2y=0$，$y=C\mathrm{e}^{2x}$　　(4) $y''-2y'+y=0$，$y=x^2\mathrm{e}^x$

3. 验证函数 $y=C_1\cos kx+C_2\sin kx$ 是方程 $y''+k^2y=0(k\neq0)$的通解，并求满足初始条件 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=0$ 的特解。

4. 设曲线上任一点处的切线斜率与切点的横坐标成反比，且曲线过点(1,2)，求该曲线的方程。

4.2 一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y')=0$$

本节只介绍几种常见的一阶微分方程及其解法。

4.2.1 可分离变量的微分方程

一般地，形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$$

的微分方程称为**可分离变量的方程**。其中，$f(x)$，$g(y)$分别是变量 x，y 的已知连续函数，且 $g(y)\neq 0$。求解可分离变量的方程的方法称为**分离变量法**。具体方法如下。

(1) 分离变量，将方程的两端转换为均只含有一个变量的函数及其微分的形式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x$$

(2) 对方程两端同时积分，得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x$$

(3) 求出积分，得通解 $G(y)=F(x)+C$，其中 $G(y)$，$F(x)$分别是$\frac{1}{g(y)}$，$f(x)$的一个原函数，C 为任意常数。

例 4-2-1 求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(\sin x-\cos x)\sqrt{1-y^2}$的通解。

解 分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$$

对方程两端同时积分，得

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y=\int(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$$

从而得

$$\arcsin y=-(\cos x+\sin x)+C$$

这就是原方程的通解。

例 4-2-2 求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x}$的通解。

解 分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

对方程两端同时积分，得

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{1}{x}\right| + C_1$$

化简，得

$$|y| = e^{C_1} \cdot \left|\frac{1}{x}\right|$$

即

$$y = \pm e^{C_1} \cdot \frac{1}{x}$$

令 $\pm e^{C_1} = C_2$，得

$$y = C_2 \frac{1}{x} \quad (C_2 \neq 0)$$

显然 $y=0$ 也是方程的解，所以 $y=\frac{C_2}{x}$ 中的 C_2 可以等于 0，因此 C_2 可以是任意常数。这样，原方程的通解是

$$y = \frac{C}{x}$$

凡遇到积分后是对数的情形，理应作类似于上述的讨论。但这样的演算过程没有必要重复。为方便起见，今后凡遇到积分后是对数都可以作简化处理。现以例 4-2-2 为例，示范如下。

分离变量，得

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{x}dx$$

对方程两端同时积分，得

$$\ln y = \ln\frac{1}{x} + \ln C \quad (\text{为计算方便，}C\text{ 取为 }\ln C)$$

化简，得

$$\ln y = \ln\frac{C}{x}$$

即

$$y = \frac{C}{x}$$

其中，C 为任意常数。

例 4-2-3 求微分方程 $y(x^2-1)dy - x(y^2+1)dx = 0$ 的通解。

解 分离变量，得

$$\frac{y}{y^2+1}dy = \frac{x}{x^2-1}dx$$

对方程两端同时积分，得

$$\frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{1}{2}\ln(x^2-1) + \frac{1}{2}\ln C$$

所以，原方程的通解为

$$y^2 + 1 = C(x^2-1)$$

*4.2.2 齐次方程

在一阶方程中，可以直接分离变量的只占少数。但有些方程通过适当的变量替换后就可以直接分离变量，齐次方程就是其中的一种。

可转换为形如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$的微分方程称为齐次微分方程，简称齐次方程。例如，方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x},\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

都是齐次方程。

齐次方程的解法是引进新的变量$u=\frac{y}{x}$，使方程转换为可分离变量的方程，然后求解。

例 4-2-4 求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}$的通解。

解 由于$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}$可转换为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$，故令$u=\frac{y}{x}$，则$y=ux$，故有$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$。将此两式代入原方程，得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1+u}{1-u}$$

整理，得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1+u^2}{1-u}$$

分离变量，得

$$\frac{1-u}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

对方程两端同时积分，得

$$\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln x+\ln C$$

即

$$\frac{\mathrm{e}^{\arctan u}}{\sqrt{1+u^2}}=Cx$$

换回原变量，得通解为

$$\mathrm{e}^{\arctan\frac{y}{x}}=C\sqrt{x^2+y^2}$$

例 4-2-5 求微分方程$y'=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$的通解。

解 令$u=\frac{y}{x}$，代入方程，得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+\tan u$$

整理，得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\tan u$$

分离变量，得

$$\cot u \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

对方程两端同时积分，得

$$\int \cot u \mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

由此可得

$$\ln\sin u = \ln x + \ln C$$

即

$$\sin u = Cx$$

换回原变量，得通解为

$$\sin\frac{y}{x} = Cx$$

即 $$y = x\arcsin Cx$$

例 4-2-6 求微分方程$(y^2-3x^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=0$的通解。

解 原方程可变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3x^2-y^2}{2xy}$$

将右端分式的分子、分母同除以x^2，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\,\frac{y}{x}}$$

令$u=\frac{y}{x}$，代入方程，得

$$u + x\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{3-u^2}{2u}$$

分离变量，得

$$\frac{2u}{3(1-u^2)}\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

对方程两端同时积分，得

$$\int\frac{2u}{3(1-u^2)}\mathrm{d}u = \int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

由此可得

$$-\frac{1}{3}\ln(1-u^2) = \ln x + \left(-\frac{1}{3}\ln C\right) \quad \left(\text{为计算方便，}C\text{ 取为 }-\frac{1}{3}\ln C\right)$$

$$\ln(1-u^2)^{-\frac{1}{3}} = \ln(C^{-\frac{1}{3}}x)$$

即

$$x^3(1-u^2) = C$$

换回原变量，得通解为

$$x^3 - xy^2 = C$$

4.2.3 一阶线性微分方程

具有以下形式的方程称为**一阶线性微分方程**，简称**一阶线性方程**。

$$y'+P(x)y=Q(x) \tag{4-2-1}$$

其中，$P(x)$，$Q(x)$都是已知连续函数。它的特点是：右边是已知函数，左边的每项中仅含y或y'，且均为y或y'的一次项。

若$Q(x)\equiv 0$，则方程变为

$$y'+P(x)y=0 \tag{4-2-2}$$

称为**一阶线性齐次微分方程**，简称**线性齐次方程**。若$Q(x)$不恒为0，则称方程(4-2-1)为**一阶线性非齐次微分方程**，简称**一阶线性非齐次方程**。方程(4-2-2)称为方程(4-2-1)所对应的线性齐次方程。

例如，方程$y'-2xy=0$和$y'+\dfrac{1}{x}y+\sin^2 x=0$分别是一阶线性齐次方程和一阶线性非齐次方程，而方程$y'-2y^2+1=0$不是线性方程，它是一个非线性方程。

下面依次讨论一阶线性齐次方程与一阶线性非齐次方程的求解方法。

1. 一阶线性齐次方程的解法

不难看出，一阶线性齐次方程$y'+P(x)y=0$是一个变量可分离方程。分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$$

对方程两端同时积分，得

$$\ln y=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln C$$

整理，得一阶线性齐次方程的通解为

$$y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\quad (C\text{为任意常数}) \tag{4-2-3}$$

例 4-2-7 求方程$y'-2xy=0$的通解。

解 方法1(分离变量法)：原方程可转换为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x$$

对方程两端同时积分，得

$$\ln y=x^2+\ln C$$

整理，得一阶线性齐次方程的通解为

$$y=Ce^{x^2}\quad (C\text{为任意常数})$$

方法2(公式法)：这是一个一阶线性齐次微分方程，其中$P(x)=-2x$，由此算出

$$-\int P(x)\mathrm{d}x=-\int -2x\mathrm{d}x=x^2$$

由通解公式即可得到方程的通解为

$$y = Ce^{-\int -2x\mathrm{d}x} = Ce^{x^2} \quad (C\text{ 为任意常数})$$

例 4-2-8　求方程 $y'+(\sin x)y=0$ 的通解。

解　这是一个一阶线性齐次方程，其中 $P(x)=\sin x$，由此算出

$$-\int P(x)\mathrm{d}x = -\int \sin x\mathrm{d}x = \cos x$$

由通解公式即可得到方程的通解为

$$y = Ce^{\cos x}$$

2．一阶线性非齐次方程的解法

当 $Q(x)\neq 0$ 时，由于方程(4-2-2)是方程(4-2-1)在 $Q(x)\equiv 0$ 时的特殊情况，所以方程(4-2-2)的通解也应是方程(4-2-1)的通解的特殊情况。于是当 $Q(x)$ 为非零函数时，可以设想方程(4-2-2)的通解公式(4-2-3)中的 C 应为 x 的函数 $C(x)$，即设方程(4-2-1)有形如 $y = C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 的解。

将 $y = C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 代入方程(4-2-1)中，得

$$C'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x)$$

即

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

故

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C$$

于是得一阶线性非齐次方程的通解公式为

$$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right) \tag{4-2-4}$$

其中，各个不定积分都只表示了对应的被积函数的一个原函数。

上面将齐次线性微分方程的通解中任意常数 C 换成待定函数 $C(x)$，然后求得线性非齐次方程的通解的方法，叫作**常数变易法**。

例 4-2-9　求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=3x$ 的通解。

解　解法 1(常数变易法)：此方程对应的齐次方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x}y = 0$$

分离变量，得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

对方程两端同时积分，得

$$\ln y = -\ln x + \ln C$$

从而得齐次方程的通解为

$$y=\frac{C}{x}$$

设原方程的解为 $y=\frac{C(x)}{x}$，代入原方程，得

$$\frac{xC'(x)-C(x)}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{C(x)}{x}=3x$$

化简，得 $$C'(x)=3x^2$$

积分，得 $$C(x)=x^3+C$$

将 $C(x)$ 代入式 $y=\frac{C(x)}{x}$ 中，得原方程的通解为

$$y=\frac{1}{x}(x^3+C)$$

解法 2（公式法）：$P(x)=\frac{1}{x}$，$Q(x)=3x$。

代入一阶线性非齐次微分方程的通解公式，得

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(C+\int 3xe^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right)=e^{-\ln x}\left(C+\int 3xe^{\ln x}dx\right)=\frac{1}{x}(C+x^3)$$

例 4-2-10 求解初值问题：

$$\begin{cases}y'-y=e^{2x}\\ y|_{x=0}=0\end{cases}$$

解 这是一个一阶线性非齐次微分方程，其中 $P(x)=-1$，$Q(x)=e^{2x}$。代入一阶线性非齐次微分方程的通解公式，得

$$y=e^{-\int(-1)dx}\left(C+\int e^{2x}e^{\int -dx}dx\right)=e^x\left(C+\int e^x dx\right)=Ce^x+e^{2x}$$

将 $y|_{x=0}=0$ 代入，求得 $C=-1$。

故此初值问题的解为 $y=e^{2x}-e^x$。

例 4-2-11 求微分方程 $(2x-y^2)dy-ydx=0$ 的通解。

解 此方程可转换为

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2x-y^2}=0$$

它不是关于未知函数 y 的一阶线性微分方程。如果将 x 看作 y 的函数，则方程可转换为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2x-y^2}{y}=\frac{2}{y}x-y$$

整理，得

$$\frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x=-y$$

这是一个一阶线性非齐次微分方程，其中 $P(y)=-\frac{2}{y}$，$Q(y)=-y$。由通解公式

$$x=e^{-\int P(y)dy}\left(C+\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy\right)$$

可得

$$x=e^{-\int -\frac{2}{y}dy}\left(C+\int -ye^{\int -\frac{2}{y}dy}dy\right)=y^2\left(C-\int y\frac{1}{y^2}dy\right)=y^2(C-\ln y)$$

*4.2.4　一阶微分方程应用举例

在自然现象和工程技术中，对许多问题的研究都可归结为求解微分方程，微分方程将数学理论与实际联系到了一起。

应用微分方程解决实际问题的一般步骤如下。

(1) 建立微分方程。根据实际问题，找出未知函数与其导数或微分之间的关系式，建立微分方程，确定初始条件。

(2) 求微分方程的通解。判断微分方程的类型，求出微分方程的通解。

(3) 确定特解。由初始条件确定所求的特解。

建立微分方程是微分方程应用中的重点，要根据导数的几何意义与物理意义，把实际问题中所涉及的曲线的切线的斜率、变速直线运动中物体的速度或加速度等用相应函数的导数表示出来，再应用几何或物理中的有关知识建立微分方程。

例 4-2-12　已知一平面曲线过点(0,0)，且在其上任一点 $M(x,y)$处的切线斜率等于该点的横、纵坐标之和，求此曲线方程。

解　设曲线方程为 $y=f(x)$。由导数的几何意义知：

$$y'=x+y$$

即

$$y'-y=x$$

这是一阶线性非齐次微分方程，其中 $P(x)=-1, Q(x)=x$。由通解公式得

$$y=e^{-\int -dx}\left(C+\int xe^{\int -dx}dx\right)=e^x(C-xe^{-x}-e^{-x})=Ce^x-x-1$$

又因曲线过点(0,0)，将 $x=0, y=0$ 代入通解中，得 $C=1$。从而所求曲线方程为

$$y=e^x-x-1$$

例 4-2-13　设一艘轮船在水上做直线运动。当其推进器停止时船的速度为 v_0。已知船在水上运动时，所受水的阻力与船速的平方成正比（比例系数为 mk，m 为船的质量）。问经过多少时间船速减为原速的一半。

解　设 $t=0$ 时，推进器停止，此时船的速度为 $v|_{t=0}=v_0$。船所受的外力即阻力

$$f=mkv^2$$

由牛顿第二运动定律 $F=ma$，可知

$$-mkv^2=ma=m\frac{dv}{dt}\quad\text{（由于阻力与速度方向相反，取负号）}$$

整理，得初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dv}{dt}=-kv^2\\ v|_{t=0}=v_0\end{cases}$$

这是一个可分离变量的方程，通过分离变量，对方程两端同时积分，得通解为

$$v = \frac{1}{kt + C}$$

将初始条件 $v|_{t=0} = v_0$ 代入，得 $C = \frac{1}{v_0}$。

因此初值问题的解为

$$v = \frac{v_0}{1 + kv_0 t}$$

当 $v = \frac{v_0}{2}$ 时，代入上式，可求得 $t = \frac{1}{kv_0}$。

所以，当时间经过 $\frac{1}{kv_0}$ 时，船速减为原速的一半。

由例 4-2-13 可以看出，在运动问题中，一般是从牛顿第二运动定律 $F = ma$ 出发来建立微分方程，其中 F 是物体所受的外力，加速度 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$。

例 4-2-14 已知物体在空气中冷却的速率与该物体及空气两者的温度差成正比。设有一瓶热水。水温原来是 100℃，空气的温度是 20℃，经过 20 小时后，瓶内水温降到 60℃，求瓶内水温的变化规律。

解 设瓶内水温 y 与时间 t 之间的函数关系为 $y = y(t)$，则水的冷却速率为 $\frac{dy}{dt}$。在水的冷却过程中，空气的温度不变。

依题意，有

$$\frac{dy}{dt} = -k(y - 20)$$

其中，k 是比例系数($k > 0$)。由于 $y = y(t)$ 是单调减少的，即 $\frac{dy}{dt} < 0$，所以上式右端前加负号，由此，此初值问题为

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -k(y - 20) \\ y|_{t=0} = 100 \end{cases}$$

这是一个可分离变量的微分方程。

分离变量，得 $\frac{dy}{y - 20} = -k dt$

对方程两端同时积分，得 $\ln(y - 20) = -kt + \ln C$

整理，得 $y - 20 = Ce^{-kt}$

将初始条件 $y|_{t=0} = 100$ 代入上式，得 $C = 80$。

于是此初值问题的解为 $y = 80e^{-kt} + 20$

其中，比例系数 k 可由题目中的另一条件 $y|_{t=20} = 60$ 来确定，即

$$60 = 80e^{-20k} + 20$$

解得 $k = -\frac{1}{20}\ln 0.5 \approx 0.0347$

因此水温与时间的函数关系为 $y = 80e^{-0.0347t} + 20$。

习题 4-2

1. 求下列可分离变量方程的解。

(1) $2x^2yy'=y^2+1$

(2) $\cos\theta+r\sin\theta\dfrac{d\theta}{dr}=0$

(3) $(1+e^x)yy'=e^x$

(4) $y'=1+x+y^2+xy^2$

(5) $\begin{cases}xydx-(1+y^2)\sqrt{1+x^2}dy=0\\ y|_{x=0}=\dfrac{1}{e}\end{cases}$

(6) $\begin{cases}(\ln y)y'=\dfrac{y}{x^2}\\ y|_{x=2}=1\end{cases}$

(7) $\begin{cases}x^2ydx=(1-y^2+x^2-x^2y^2)dy\\ y|_{x=-1}=1\end{cases}$

(8) $\begin{cases}dx+xydy=y^2dx+ydy\\ y|_{x=0}=2\end{cases}$

*2. 求下列齐次方程的解。

(1) $y^2+x^2\dfrac{dy}{dx}=xy\dfrac{dy}{dx}$

(2) $xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$

(3) $x\dfrac{dy}{dx}=y\ln\dfrac{y}{x}$

(4) $(x^2+y^2)dx-xydy=0$

3. 求下列一阶线性微分方程的解。

(1) $\dfrac{dy}{dx}+y=0$

(2) $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=0$

(3) $2y'-y=e^x$

(4) $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+5y=-4e^{-3x}\\ y|_{x=0}=-4\end{cases}$

(5) $\begin{cases}y'-y=e^x\\ y|_{x=0}=1\end{cases}$

(6) $\begin{cases}xy'+y=\cos x\\ y|_{x=\pi}=1\end{cases}$

*4. 质量为 m 的降落伞从飞机上下落后，所受空气的阻力与下降速度成正比(比例系数为常数 $k>0$)，且伞张开时的速度为 $0(t=0)$。求下降的速度 v 与时间 t 的函数关系。

4.3 可降阶的高阶微分方程

本节讨论二阶及二阶以上的微分方程，即高阶微分方程。对于具有一些特点的高阶微分方程，在求解时，常常采用逐步降低方程阶数的方法。下面介绍 3 种容易降阶的高阶微分方程的求解方法。

4.3.1 右端仅含自变量 x 的方程

对于右端仅含自变量 x 的方程如 $y^{(n)}=f(x)$，只须把 $y^{(n-1)}$ 作为新的未知函数，那么上式就是一个以 $y^{(n-1)}$ 为新未知函数的一阶微分方程，即

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx}=f(x)$$

对方程两端同时积分，得

$$y^{(n-1)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1$$

同理可得

$$y^{(n-2)}=\int\left[\int f(x)\mathrm{d}x+C_1\right]\mathrm{d}x+C_2$$

因此，连续积分 n 次，便可求得方程 $y^{(n)}=f(x)$ 的含有 n 个任意常数的通解。

例 4-3-1 求 $y'''=x-\cos x$ 的通解。

解 对该方程连续积分三次，分别得

$$y''=\frac{x^2}{2}-\sin x+C$$

$$y'=\frac{x^3}{6}+\cos x+Cx+C_2$$

$$y=\frac{x^4}{24}+\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3\quad\left(C_1=\frac{1}{2}C\right)$$

4.3.2 右端不显含未知函数 y 的方程

对于右端不显含未知函数 y 的方程如 $y''=f(x,y')$，为把方程降阶，设 $y'=p(x)$，那么

$$y''=p'=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

此方程可转换为 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=f(x,p)$，它是关于变量 x,p 的一阶微分方程。

设它的通解为 $p=\varphi(x,C_1)$，即$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(x,C_1)$，它是关于 y 的一阶微分方程。通过积分可得原方程的通解为

$$y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2$$

例 4-3-2 求微分方程$(1+x^2)y''=2xy'$满足初值条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=3$ 的特解。

解 方程属于 $y''=f(x,y')$类型，故令 $y'=p(x)$，得

$$y''=p'=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

将原方程转换为

$$(1+x^2)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=2xp$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

对方程两端同时积分，得

$$\ln p=\ln(1+x^2)+\ln C_1$$

整理，得

$$p=y'=C_1(1+x^2)$$

由于 $y'|_{x=0}=3$，得 $C_1=3$，即

$$y' = 3(1+x^2)$$

积分得

$$y = x^3 + 3x + C_2$$

又由于 $y|_{x=0}=1$，得 $C_2=1$，从而所求通解为

$$y = x^3 + 3x + 1$$

由上面的解法可见，在求特解的运算过程中，出现任意常数后，马上用初始条件代入，确定任意常数，可使运算过程简化。

*4.3.3 右端不显含自变量 x 的方程

对于右端不显含自变量 x 的方程如 $y''=f(y,y')$，为把方程降阶，设 $y'=p(y)$，将 y 看作中间变量，此时

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

因此方程降阶为 p 与 y 之间的一个一阶微分方程

$$p \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y,p)$$

设它的通解为 $y'=p=\varphi(y,C_1)$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(y,C_1)$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)} = \mathrm{d}x$$

对上式两端同时积分，得

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)} = x + C_2$$

例 4-3-3 求微分方程 $yy''-y'^2=0$ 的通解。

解 该方程属于不显含 x 的类型，设 $y'=p(y)$，得

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

代入方程，则方程转换为

$$yp \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 = 0$$

或

$$p\left(y \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p\right) = 0$$

它相当于两个方程：$p=0$ 与 $y \cdot \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p = 0$。

由第一个方程解得 $y=C$。

对第二个方程可用分离变量法解。

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

对上式两端同时积分，得

$$\ln p = \ln y + \ln C_1$$

整理，得

$$p = y' = C_1 y$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1 y$$

再分离变量、积分，得

$$\ln y = C_1 x + \ln C_2$$

整理，得

$$y = C_2 \mathrm{e}^{C_1 x}$$

这是原方程的通解（解 $y=C$ 包含在这个通解中，即 $C_1=0$ 的情形）。

例 4-3-4 求微分方程 $2yy''=1+y'^2$ 满足初值条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=1$ 的特解。

解 由于方程不显含自变量 x，令 $y'=p(y)$，则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，于是原方程转换为

$$2yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 1 + p^2$$

分离变量，得

$$\frac{2p\mathrm{d}p}{1+p^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

对上式两端同时积分，得

$$\ln(1+p^2) = \ln y + \ln C_1$$

即

$$1 + p^2 = C_1 y$$

将 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=1$ 代入上式，得 $C_1=2$，则 $p^2=2y-1$，即

$$p = \pm\sqrt{2y-1}$$

由于方程要求的是满足初始条件 $y'|_{x=0}=1$ 的解，所以取正的一支，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{2y-1}$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2y-1}} = \mathrm{d}x$$

对上式两端同时积分，得

$$\sqrt{2y-1} = x + C_2$$

将初始条件 $y|_{x=0}=1$ 代入，得 $C_2=1$。故此初值问题的解为

$$\sqrt{2y-1} = x + 1$$

习题 4-3

1. 求下列方程的通解。

(1) $y'''=x+\sin x$　　(2) $y'''=e^{2x}-\cos x$　　(3) $y'''=xe^x$

(4) $y''-\dfrac{1}{1+x^2}=0$　　(5) $y''=1+(y')^2$　　(6) $y''=y'+x$

2. 求下列微分方程满足初始条件的特解。

(1) $\begin{cases} y'''=e^x \\ y|_{x=1}=0 \\ y'|_{x=1}=0 \\ y''|_{x=1}=0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} y'''=e^{ax} \\ y|_{x=1}=0 \\ y'|_{x=1}=0 \\ y''|_{x=1}=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y''=3\sqrt{y} \\ y|_{x=0}=1 \\ y'|_{x=0}=2 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} y''-e^{2y}=0 \\ y|_{x=0}=0 \\ y'|_{x=0}=0 \end{cases}$

4.4 二阶常系数线性微分方程

二阶线性微分方程与一阶线性微分方程相比,求解要复杂得多。一阶线性微分方程有统一的求解公式,二阶线性微分方程却没有。但是当二阶线性微分方程中 y'',y',y 的系数是常数时,就有了统一的求解方法。本节主要介绍二阶常系数线性微分方程的求解方法。

二阶常系数线性微分方程的一般形式如下:

$$y''+py'+qy=f(x)$$

其中,p,q 是常数,$f(x)$是 x 的已知函数。

当 $f(x)\neq 0$ 时,称方程

$$y''+py'+qy=f(x) \tag{4-4-1}$$

为**二阶常系数线性非齐次微分方程**。

当 $f(x)\equiv 0$ 时,方程变为

$$y''+py'+qy=0 \tag{4-4-2}$$

称为**二阶常系数线性齐次微分方程**。

4.4.1 二阶常系数线性齐次微分方程

定理 4-4-1 如果函数 y_1 与 y_2 是二阶线性齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的两个特解,且$\dfrac{y_2}{y_1}$非常数,则函数 $y=C_1y_1+C_2y_2$(C_1,C_2 是任意常数)是二阶线性齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解。

证明 由于 y_1 与 y_2 是二阶线性齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的解,所以

$$y_1''+py_1'+qy_1=0$$
$$y_2''+py_2'+qy_2=0$$

将 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 代入二阶线性齐次方程 $y''+py'+qy=0$，得

$$\begin{aligned} y''+py'+qy &= (C_1y_1+C_2y_2)''+p(C_1y_1+C_2y_2)'+q(C_1y_1+C_2y_2) \\ &= C_1(y_1''+py_1'+qy_1)+C_2(y_2''+py_2'+qy_2) \\ &= C_1\cdot 0+C_2\cdot 0=0 \end{aligned}$$

即 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 是二阶线性齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的解。

又因为$\frac{y_2}{y_1}$非常数，所以 C_1,C_2 不能合并，即 y 中含有两个独立的任意常数 C_1,C_2，因此 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 是二阶线性齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解。

证毕。

满足条件$\frac{y_2}{y_1}$非常数的两个解，称为线性无关的解，否则称为线性相关的解。

由定理 4-4-1 可知，求二阶线性齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解可归纳为求它的两个线性无关的特解。如何求出二阶线性齐次方程的两个线性无关的特解呢？考虑二阶线性齐次方程，要使未知函数与它的导数、二阶导数之间只相差常数因子，则它们应该是同类函数，由于只有指数函数才具有这种性质，因此可猜想指数函数 $y=e^{rx}$ 有可能就是二阶线性齐次方程的解。

将 $y=e^{rx}$，$y'=re^{rx}$，$y''=r^2e^{rx}$ 代入方程 $y''+py'+qy=0$ 中，得

$$e^{rx}(r^2+pr+q)=0$$

因为 $e^{rx}\neq 0$，所以有

$$r^2+pr+q=0 \tag{4-4-3}$$

这说明，只要是方程(4-4-3)的根，那么函数 $y=e^{rx}$ 就一定是方程(4-4-2)的解。这样就把解微分方程的问题转化为代数方程求根的问题。

称代数方程 $r^2+pr+q=0$ 为方程 $y''+py'+qy=0$ 的**特征方程**，其中 r^2，r 的系数及常数项恰好依次是方程 $y''+py'+qy=0$ 中 y''，y'及 y 的系数。特征方程的两个根称为**特征根**。

特征根是一个二次方程的根，按二次方程根的判别式，有下列 3 种不同的情形。

(1) r_1,r_2 是两个不相等的实根。因为 $y_1=e^{r_1x}$，$y_2=e^{r_2x}$是方程(4-4-2)的两个特解，且$\frac{y_2}{y_1}=e^{(r_1-r_2)x}$非常数，即它们线性无关。由定理 4-4-1 可知，方程(4-4-2)的通解为

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$$

例 4-4-1 求微分方程 $y''-y'-12y=0$ 的通解。

解 该微分方程的特征方程为

$$r^2-r-12=0$$

其特征根为

$$r_1=-3,\quad r_2=4$$

所以方程的通解为

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{4x}$$

例 4-4-2 求微分方程 $y''-3y'=0$ 的通解。

解 该微分方程的特征方程为

$$r^2 - 3r = 0$$

其特征根为

$$r_1 = 0,\quad r_2 = 3$$

所以方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{3x}$$

(2) r_1, r_2 是两个相等的实根。由于 $r_1=r_2$,因此只能得到方程(4-4-2)的一个特解 $y_1=e^{r_1x}$,仍需要求出另一个与 y_1 线性无关的特解 y_2。为此设$\frac{y_2}{y_1}=u(x)$非常数,则有 $y_2=u(x)y_1$,其中 $u(x)$为待定函数。

将 $y_2=u(x)y_1=u(x)e^{r_1x}$代入方程(4-4-2)中,得

$$(u(x)e^{r_1x})'' + p(u(x)e^{r_1x})' + qu(x)e^{r_1x} = 0$$

整理,得

$$e^{r_1x}[u''(x) + (2r_1 + p)u'(x) + (r_1^2 + pr_1 + q)u(x)] = 0$$

由于 r_1 是特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的二重根,因此 $r_1^2+pr_1+q=0$ 且 $2r_1+p=0$;又因为 $e^{r_1x}\neq0$,所以有

$$u''(x) = 0$$

解得

$$u(x) = C_1 + C_2 x$$

即满足条件的 $u(x)$有无穷多个。取其中最简单的一个不为常数的解 $u(x)=x$,由此得到方程(4-4-2)的另一特解为

$$y_2 = xe^{r_1x}$$

从而方程(4-4-2)的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1x}$$

例 4-4-3 求微分方程 $y''+6y'+9y=0$ 的通解。

解 该微分方程的特征方程为

$$r^2 + 6r + 9 = 0$$

其特征根为

$$r_1 = r_2 = -3$$

所以方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}$$

(3) $r_1=\alpha+i\beta, r_2=\alpha-i\beta, (\beta>0)$是一对共轭复根。由于$\frac{e^{r_1x}}{e^{r_2x}}=e^{i2\beta x}$非常数,故 $y_1=e^{r_1x}=e^{(\alpha+i\beta)x}$, $y_2=e^{r_2x}=e^{(\alpha-i\beta)x}$是方程(4-4-2)的两个线性无关的特解,但这两个特解中含有复数,不便于应用。为了得到方程(4-4-2)的不含有复数的解,利用欧拉公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

把 y_1 和 y_2 改写为

$$y_1=e^{r_1x}=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}e^{i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$$

$$y_2=e^{r_2x}=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}e^{-i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

利用定理 4-4-1,可得微分方程(4-4-2)的两个解为

$$\bar{y}_1=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\bar{y}_2=\frac{1}{2i}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

而且 $\bar{y}_1$ 与 $\bar{y}_2$ 线性无关,所以,微分方程(4-4-2)的通解为

$$y=C_1\bar{y}_1+C_2\bar{y}_2=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

综合上面的讨论可知,求解二阶常系数齐次线性微分方程的步骤如下。

第 1 步：写出微分方程的特征方程 $r^2+pr+q=0$；

第 2 步：求出特征方程的特征根 r_1,r_2；

第 3 步：根据 r_1,r_2 的 3 种不同情况,按表 4-4-1 写出方程的通解。

表 4-4-1

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根	方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
两个相异实根 $r_1\neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等实根 $r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

例 4-4-4 求微分方程 $y''+2y'+4y=0$ 的通解。

解 该微分方程的特征方程为

$$r^2+2r+4=0$$

其特征根为

$$r_{1,2}=-1\pm\sqrt{3}i\quad(\alpha=-1,\beta=\sqrt{3})$$

所以方程的通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x)$$

4.4.2 二阶常系数非齐次线性微分方程

定理 4-4-2 设 y^* 是非齐次线性微分方程(4-4-1)的一个特解,Y 是对应的齐次方程(4-4-2)的通解,则 $y=Y+y^*$ 是非齐次线性微分方程(4-4-1)的通解。

证明 因为 y^* 是非齐次线性微分方程(4-4-1)的解,故有

$$y^{*''}+py^{*'}+qy^*=f(x)$$

又因为 Y 是齐次线性微分方程(4-4-2)的解,故有

$$Y''+pY'+qY=0$$

因此

$$\begin{aligned}&(Y+y^*)''+p(Y+y^*)'+q(Y+y^*)\\=&(Y''+pY'+qY)+(y^{*''}+py^{*'}+qy^*)\\=&0+f(x)\\\equiv&f(x)\end{aligned}$$

由于 Y 中含有两个独立的任意常数,可知 $y=Y+y^*$ 是非齐次方程(4-4-1)的通解。

证毕。

由定理 4-4-2 可知,求方程(4-4-1)的通解时,可先求出它对应的线性齐次方程(4-4-2)的通解 Y 和方程(4-4-1)的一个特解 y^*,再相加便可得方程(4-4-1)的通解。Y 的求法已经讨论过,所以下面只要讨论如何求线性非齐次微分方程(4-4-1)的一个特解就可以了。

下面仅就 $f(x)$ 的两种常见形式进行讨论。

(1) $f(x)=P_n(x)e^{\lambda x}$(其中 λ 是常数,$P_n(x)$ 是 x 的一个 n 次多项式)。此时,方程(4-4-1)成为

$$y''+py'+qy=P_n(x)e^{\lambda x} \tag{4-4-4}$$

因为 $f(x)$ 是多项式 $P_n(x)$ 与指数函数 $e^{\lambda x}$ 的乘积,而多项式与指数函数的导数仍是同一类函数。因此设想方程(4-4-4)的特解为 $y^*=Q(x)e^{\lambda x}$($Q(x)$ 为 x 的未知多项式)。

对 y^* 求导,得

$$\begin{aligned}y^{*'}&=Q'(x)e^{\lambda x}+\lambda Q(x)e^{\lambda x}\\y^{*''}&=Q''(x)e^{\lambda x}+2\lambda Q'(x)e^{\lambda x}+\lambda^2Q(x)e^{\lambda x}\end{aligned}$$

代入方程,消去 $e^{\lambda x}$,得

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_n(x) \tag{4-4-5}$$

式(4-4-5)两端都是 x 的多项式,$Q(x)$ 的次数应使方程左端的次数等于右端多项式的次数 n。由于多项式求导一次就降幂一次,故分以下 3 种情形进行讨论。

① $\lambda^2+p\lambda+q\neq0$ 时,λ 不是相应的线性齐次方程的特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的特征根,由式(4-4-5)知,$Q(x)$ 的次数应和 $P_n(x)$ 的次数 n 相同。

② $\lambda^2+p\lambda+q=0$,但 $2\lambda+p\neq0$ 时,即 λ 是特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的特征单根,式(4-4-5)左端的次数由 $Q'(x)$ 决定。比较两边可知,$Q(x)$ 应为 $n+1$ 次多项式。

③ $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 且 $2\lambda+p=0$ 时,即 λ 是特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的特征重根时,式(4-4-5)变为 $Q''(x)=P_n(x)$,这表明 $Q''(x)$ 的次数应与右端的次数相同,说明 $Q(x)$ 应为 $n+2$ 次多项式。

综上所述,对于方程 $y''+py'+qy=P_n(x)e^{\lambda x}$,可设特解为 $y^*=x^kQ_n(x)e^{\lambda x}$,其中 $Q_n(x)$ 是与 $P_n(x)$ 同次的多项式,其系数待定,而

$$k=\begin{cases}0 & \lambda\text{ 不是特征根}\\1 & \lambda\text{ 是特征单根}\\2 & \lambda\text{ 是特征重根}\end{cases}$$

例 4-4-5　求微分方程 $y''+y'+2y=(8x+13)e^{2x}$ 的一个特解。

解　因为 $f(x)=(8x+13)e^{2x}$,则 $\lambda=2$ 不是特征方程的特征根,所以取 $k=0$,故设方程的特解为

$$y^* = (Ax+B)e^{2x}$$

求导数，得

$$y^{*\prime} = [2Ax+(A+2B)]e^{2x}$$

$$y^{*\prime\prime} = [4Ax+(4A+4B)]e^{2x}$$

代入原方程，消去 $e^{2x}\neq 0$，整理，得

$$8Ax+(5A+8B) = 8x+13$$

比较同次项系数，有

$$\begin{cases}8A = 8\\5A+8B = 13\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}A=1\\B=1\end{cases}$$

所以原方程的一个特解为

$$y^* = (x+1)e^{2x}$$

例 4-4-6 求微分方程 $y''+2y'=3x^2$ 的一个特解。

解 因为 $f(x)=3x^2=3x^2e^{0x}$，则 $\lambda=0$ 是特征方程 $r^2+2r=0$ 的特征单根，所以取 $k=1$。故设方程的一个特解为

$$y^* = x(Ax^2+Bx+C)$$

求导数，得

$$y^{*\prime} = 3Ax^2+2Bx+C$$

$$y^{*\prime\prime} = 6Ax+2B$$

代入原方程，整理，得

$$6Ax^2+(6A+4B)x+2B+2C = 3x^2$$

比较同次项系数，有

$$\begin{cases}6A = 3\\6A+4B = 0\\2B+2C = 0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}A=\dfrac{1}{2}\\B=-\dfrac{3}{4}\\C=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

所以原方程的一个特解为

$$y^* = \frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x$$

例 4-4-7 求微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的通解。

解 该方程对应的齐次方程为

$$y''-5y'+6y = 0$$

其特征方程为

$$r^2-5r+6=0$$

特征根为 $r_1=2, r_2=3$,故对应齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$$

由于 $\lambda=2$ 是特征方程的单根,所以取 $k=1$,故设非齐次方程的特解为

$$y^*=x(Ax+B)e^{2x}$$

求导数,得

$$y^{*\prime}=[2Ax^2+(2A+2B)x+B]e^{2x}$$
$$y^{*\prime\prime}=[4Ax^2+(8A+4B)x+2A+4B]e^{2x}$$

代入非齐次方程,消去 $e^{2x}\neq 0$,得

$$-2Ax+2A-B=x$$

比较同次项系数,得

$$\begin{cases}-2A=1\\2A-B=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}A=-\dfrac{1}{2}\\B=-1\end{cases}$$

由此求得非齐次方程的一个特解为

$$y^*=x\left(-\frac{1}{2}x-1\right)e^{2x}$$

从而得该非齐次方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+x\left(-\frac{1}{2}x-1\right)e^{2x}$$

(2) $f(x)=e^{\alpha x}[a\cos\beta x+b\sin\beta x]$。此时方程(4-4-1)成为

$$y''+py'+qy=e^{\alpha x}[a\cos\beta x+b\sin\beta x] \tag{4-4-6}$$

由于指数函数 $e^{\alpha x}$ 的各阶导数仍是指数函数,正弦函数和余弦函数的各阶导数也总是正弦函数或余弦函数,因此方程的特解也应属于同一类型函数的乘积,故设它的特解为:

$$y^*=x^ke^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$$

其中,A,B 为待定的常数,而

$$k=\begin{cases}0 & \alpha\pm i\beta\ \text{不是相应的齐次方程的特征根}\\1 & \alpha\pm i\beta\ \text{是相应的齐次方程的特征根}\end{cases}$$

例 4-4-8　求微分方程 $y''+y'-2y=\sin x$ 的一个特解。

解　由于 $\alpha=0,\beta=1,\alpha\pm i\beta=\pm i$ 不是特征方程 $r^2+r-2=0$ 的特征根,所以取 $k=0$。故设方程的一个特解为

$$y^*=A\cos x+B\sin x$$

求导数,得

$$y^{*\prime}=-A\sin x+B\cos x$$
$$y^{*\prime\prime}=-A\cos x-B\sin x$$

代入微分方程,得

$$(-3A+B)\cos x+(-A-3B)\sin x=\sin x$$

比较同类项系数，得

$$\begin{cases}-3A+B=0\\-A-3B=1\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}A=-\dfrac{1}{10}\\B=-\dfrac{3}{10}\end{cases}$$

于是，求得一个特解为

$$y^*=-\frac{1}{10}\cos x-\frac{3}{10}\sin x$$

例 4-4-9 解初值问题

$$\begin{cases}y''+y=\cos x\\y\,|_{x=0}=1\\y'\,|_{x=0}=0\end{cases}$$

解 该方程所对应的齐次方程为

$$y''+y=0$$

特征方程为 $r^2+1=0$

特征根为 $r=\pm\mathrm{i}$

因此，齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

由于方程 $y''+y=\cos x$ 中，$\alpha=0$，$\beta=1$，$\alpha\pm\mathrm{i}\beta=\pm\mathrm{i}$ 是特征方程 $r^2+1=0$ 的特征根，所以取 $k=1$。故设原方程的特解为

$$y^*=x(A\cos x+B\sin x)$$

求导数，得

$$y^{*\prime}=A\cos x+B\sin x+x(-A\sin x+B\cos x)$$
$$y^{*\prime\prime}=-2A\sin x-Bx\sin x+2B\cos x-Ax\cos x$$

代入微分方程，得

$$-2A\sin x+2B\cos x=\cos x$$

比较同类项系数，得

$$\begin{cases}-2A=0\\2B=1\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}A=0\\B=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

因此，原方程的特解为

$$y^*=\frac{1}{2}x\sin x$$

从而原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$$

将初始条件代入 y 及 y' 中,得 $C_1=1, C_2=0$。故此初值问题的解为

$$y = \cos x + \frac{1}{2}x\sin x$$

习题 4-4

1. 求下列微分方程的通解。

(1) $y''+3y'-4y=0$　(2) $\frac{d^2 s}{dt^2}-2\frac{ds}{dt}=0$　(3) $y''-2y'+2y=0$

(4) $y''+3y=0$　(5) $y''-6y'+9y=0$　(6) $y''-5y'=0$

2. 求下列微分方程的特解。

(1) $\begin{cases} y''-4y'+3y=0 \\ y(0)=4 \\ y'(0)=10 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} y''-2y'=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=3 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} y''+9y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=3 \end{cases}$

3. 已知特征方程的根为下面的形式,试写出相应的二阶齐次方程和它们的通解。

(1) $r_1=2, r_2=-3$　(2) $r_1=r_2=1$　(3) $r_1=-2+\mathrm{i}, r_2=-2-\mathrm{i}$

4. 求下列微分方程的一个特解。

(1) $y''-y'-2y=x^2+1$　(2) $y''-y'-2y=xe^x$　(3) $y''-y'=e^x$

(4) $y''+4y'+4y=4e^{2x}$　(5) $y''-y'-6y=10\sin x$　(6) $y''+\omega^2 y=\cos\omega x$

5. 解下列初值问题。

(1) $\begin{cases} y''-3y'+2y=5 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} y''-y=4xe^x \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$

*6. 一质量为 m 的物体从水面由静止状态开始下降,所受阻力与下降速度成正比(比例系数为 $k>0$),求物体下降深度与时间 t 的函数关系。

*7. 一质点在一直线上由静止状态开始运动,其加速度 $a=-4s(t)+3\sin t$,试求运动方程 $s=s(t)$。

第5章

空间解析几何与向量代数

在平面解析几何中，通过坐标法把平面上的点与一对有序的数对应起来，把平面上的图形和方程对应起来，从而用代数的方法来研究几何问题。空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的。本章先引入向量的概念，根据向量的线性运算建立空间直角坐标系，然后利用坐标讨论向量的运算，并介绍空间解析几何的有关内容，主要内容包括空间曲面、曲线、平面、直线及它们的方程表示。

5.1 向量及其线性运算

5.1.1 向量的概念

在研究力学、物理学以及其他应用科学时，经常会遇到这样一类量，它们既有大小，又有方向，如力、力矩、位移、速度、加速度等，这一类量叫作**向量**（或**矢量**）。

在数学上，用一条有方向的线段（称为有向线段）来表示向量。有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向。以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{AB}$。有时用黑体字母表示，也可用上加箭头书写体字母表示，如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或$\vec{a}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$ 等。

由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，所以在数学上我们只研究与起点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**，简称**向量**。因此，如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，则说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是**相等的**，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。相等的向量经过平移后可以完全重合。

向量的大小叫作向量的**模**。向量 $\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$、$\overrightarrow{AB}$的模分别记作$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$、$|\overrightarrow{AB}|$。模等于 1 的向量叫作**单位向量**。模等于 0 的向量叫作**零向量**，记作 $\boldsymbol{O}$。零向量的起点与终点重合，它的方向可以看作是任意的。

向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$或$(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$（设 $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，则 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$）。

对于两个非零向量，如果它们的方向相同或相反，则称这两个向量**平行**。向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则有$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$。零向量认为是与任何向量都平行。若$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{2}$，则

称这两个向量**垂直**。

当两个平行向量的起点为同一点时，它们的终点和公共的起点在一条直线上。此时称两向量**共线**。

类似地，还有共面的概念。设有 $k(k\geqslant 3)$ 个向量，当它们的起点为同一点时，如果 k 个终点和公共起点在一个平面上，就称这 k 个向量**共面**。

5.1.2　向量的线性运算

1. 向量的加减法

向量的加法运算规定如下。

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，平移向量使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 5-1-1 所示。

上述作出两向量之和的方法叫作向量加法的**三角形法则**。

另外，还有向量相加的**平行四边形法则**：当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合，以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形，从公共起点到对角的向量等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 5-1-2 所示。

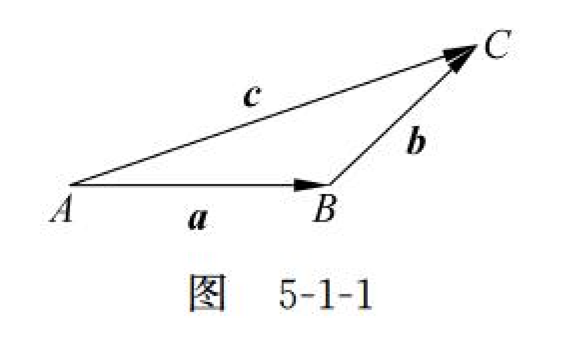


图　5-1-1

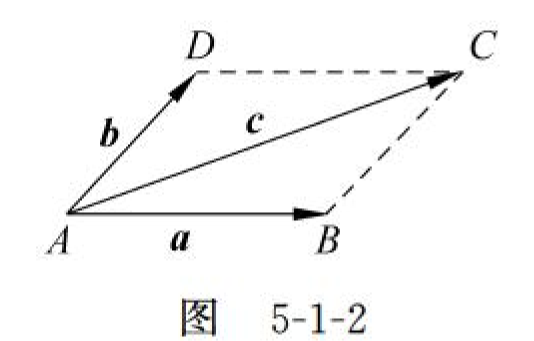


图　5-1-2

向量的加法满足下列运算规律。

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$。

由于向量的加法符合交换律与结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$ 相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$$

按向量相加的三角形法则，可得 n 个向量相加的法则如下：使前一向量的终点作为下一向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和。

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫作 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记为 $-\boldsymbol{a}$，如图 5-1-3 所示。

我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$$

即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，便得到 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，如图 5-1-4 所示。



图　5-1-3

图　5-1-4

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{O}$$

显然，对于任意的向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O，有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

因此，若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O，则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引的向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$。

由三角形两边之和大于第三边的原理，有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,\quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

其中，等号在 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向或反向时成立。

2. 向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$。规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反。

当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向可以是任意的。

特别地，当 $\lambda=\pm1$ 时，有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\quad (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$$

向量与数的乘积满足下列运算规律。

(1) 结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$。

例 5-1-1 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{DM}$，其中 M 是平行四边形对角线的交点，如图 5-1-5 所示。

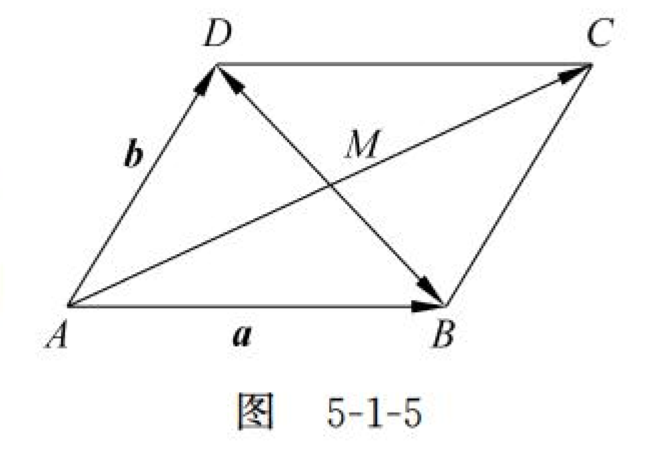


图 5-1-5

解 由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{2AM}=-2\overrightarrow{MA}$$

于是

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\quad \overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

因为 $-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{DM}$，所以

$$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),\quad \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$

已知模等于 1 的向量叫作单位向量。设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{O}$，则向量 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，记作 $\boldsymbol{e}_a$。即 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$。于是 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$。

定理 5-1-1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{O}$，那么，向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$。

证明 条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性。

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$。取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取负值，即 $\boldsymbol{b}=$

$\lambda\boldsymbol{a}$。这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向,且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$$

再证明数 λ 的唯一性。设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$,两式相减,便得 $(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{O}$,即 $|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=\boldsymbol{O}$。因 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$,故 $|\lambda-\mu|=0$,即 $\lambda=\mu$。

证毕。

由定理 5-1-1 可知,给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴。设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴 Ox,对于轴上任一点 P,对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$,由 $\overrightarrow{OP}/\!/\boldsymbol{i}$,根据定理 5-1-1,必有唯一的实数 x,使 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$(实数 x 叫作轴上**有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值**),并知 $\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 一一对应,于是

$$点\ P\leftrightarrow 向量\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}\leftrightarrow 实数\ x$$

从而轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系。据此,定义实数 x 为轴上点 P 的坐标。

由此可知,轴上点 P 的坐标为 x 的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$$

5.1.3 空间直角坐标系

在空间取定一点 O 和 3 个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$,就确定了 3 条都以 O 为原点的两两垂直的数轴,依次记作 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),统称为**坐标轴**。它们构成一个空间直角坐标系,称为 $Oxyz$ 坐标系,如图 5-1-6 所示。通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上,而 z 轴则是铅垂线;它们的正向通常符合右手规则,即以右手握住 z 轴,当右手的 4 个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向正向 y 轴时,大拇指的指向就是 z 轴的正向,如图 5-1-7 所示。

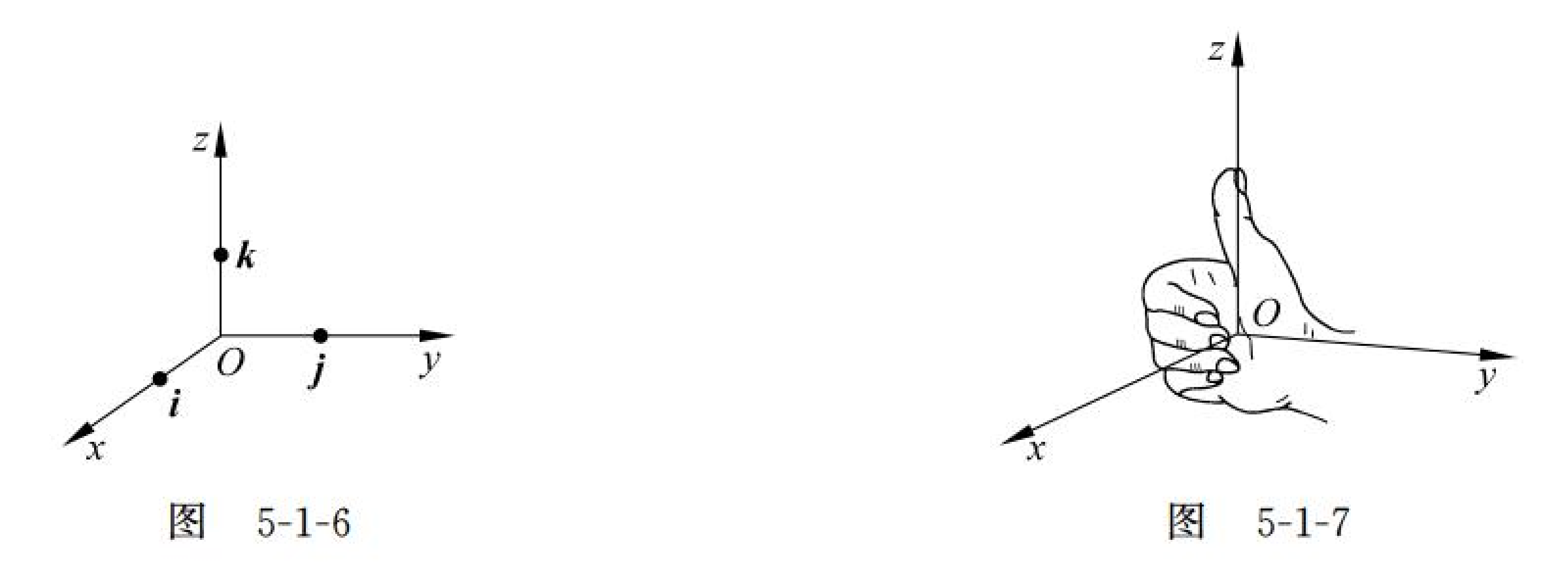


图 5-1-6　　图 5-1-7

在空间直角坐标系中,任意两个坐标轴可以确定一个平面,这种平面称为坐标面。由 x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫作 xOy 面,另两个由 y 轴及 z 轴所确定的坐标面和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面,分别叫作是 yOz 面和 zOx 面。3 个坐标面把空间分成 8 个部分,每一部分叫作**卦限**。含有 3 个正半轴的卦限叫作**第一卦限**,它位于 xOy 面的上方。在 xOy 面的上方按逆时针方向排列着第二卦限、第三卦限和第四卦限。在 xOy 的下方,与第一卦限对应的是第五卦限,按逆时针方向还排列着第六卦限、第七卦限和第八卦限。8 个卦限分别用罗马数字Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示,如图 5-1-8 所示。

任给向量 $\boldsymbol{r}$，对应有点 M，使$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$。以 OM 为对角线、3 条坐标轴为棱作长方体，如图 5-1-9 所示，有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

设
$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$$

则
$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

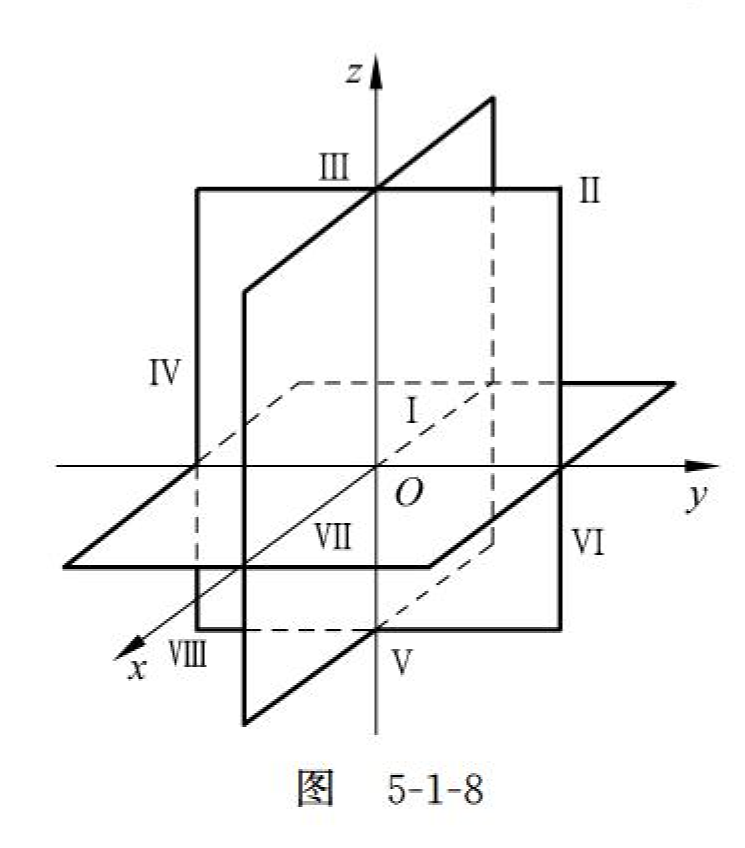


图 5-1-8

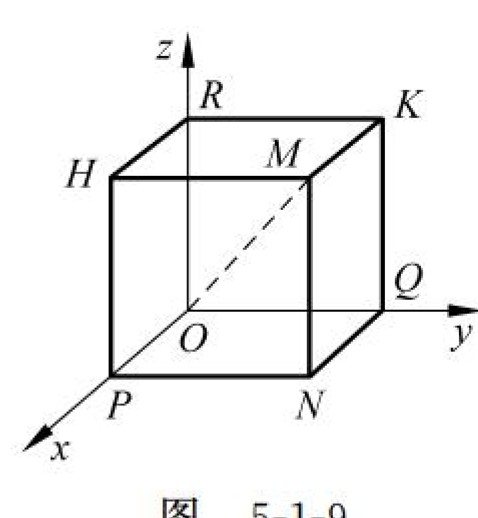


图 5-1-9

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式，$x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$、$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿 3 个坐标轴方向的分向量。

显然，给定向量 $\boldsymbol{r}$，就确定了点 M 及$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$ 这 3 个分向量，进而确定了 x、y、z 这 3 个有序数；反之，给定 3 个有序数 x、y、z，也就确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M。于是，点 M、向量 $\boldsymbol{r}$ 与 3 个有序数 x、y、z 之间有一一对应的关系：

$$M\leftrightarrow\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\leftrightarrow(x,y,z)$$

据此定义：有序数 x、y、z 称为向量 $\boldsymbol{r}$（在坐标系 $Oxyz$）中的坐标，记作 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$；有序数 x、y、z 也称为点 M（在坐标系 $Oxyz$）的**坐标**，记作 $M(x,y,z)$。

向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$称为点 M 关于原点 O 的**向径**。上述定义表明，一个点与该点的向径有相同的坐标。记号 (x,y,z) 既表示点 M，又表示向量$\overrightarrow{OM}$。

坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征。例如：点 M 在 yOz 面上，则 $x=0$；同样地，在 zOx 面上的点，有 $y=0$；在 xOy 面上的点，有 $z=0$。如果点 M 在 x 轴上，则 $y=z=0$；同样，如果点在 y 轴上，则 $z=x=0$；在 z 轴上的点，有 $x=y=0$。如果点 M 为原点，则 $x=y=z=0$。

5.1.4 利用坐标进行向量的线性运算

利用向量的坐标，可得向量的一些运算如下。

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})-(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda \boldsymbol{a} &= \lambda(a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) = (\lambda a_x)\boldsymbol{i} + (\lambda a_y)\boldsymbol{j} + (\lambda a_z)\boldsymbol{k} \\ &= (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)\end{aligned}$$

显然,对向量进行加、减及与数相乘运算,只须对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算即可。

由定理 5-1-1 知,若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)\neq \boldsymbol{O}$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,用坐标表示为$(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z)$,这说明向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 对应的坐标成比例,即$\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$。

例 5-1-2　已知两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq -1$,在直线 P_1P_2 上求一点 P,使$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$,如图 5-1-10 所示。

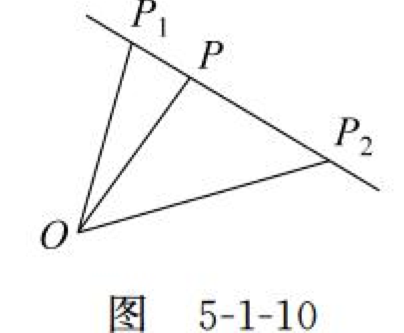


图　5-1-10

解　解法 1:由于$\overrightarrow{P_1P}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_1}$,$\overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP}$,因此

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_1}=\lambda(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP})$$

从而得

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2})=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$$

这就是点 P 的坐标。

解法 2:设所求点为 $P(x,y,z)$,则

$$\overrightarrow{P_1P}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$$
$$\overrightarrow{PP_2}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$$

依题意有 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$,即

$$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$$
$$(x,y,z)-(x_1,y_1,z_1)=\lambda(x_2,y_2,z_2)-\lambda(x,y,z)$$
$$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2)$$
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

点 P 叫作有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$的**定比分点**。当 $\lambda=1$ 时,点 P 为有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$的中点,其坐标为

$$\left(x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

5.1.5　向量的模、方向角与投影

1. 向量的模与两点间的距离公式

设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$,作$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,如图 5-1-9 所示,则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

按勾股定理可得

$$|\boldsymbol{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}$$

设 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$

有 $|OP|=|x|,\quad |OQ|=|y|,\quad |OR|=|z|$

于是得向量模的坐标表示式为

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

设有点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

于是点 A 与点 B 间的距离为

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

例 5-1-3 设 P 在 x 轴上，它到 $P_1(0,-1,1)$ 的距离为到点 $P_2(0,\sqrt{2},3)$ 的距离的一半，求点 P 的坐标。

解 因为 P 在 x 轴上，设 P 点坐标为 $(x,0,0)$，则有

$$|PP_1|=\sqrt{(-x)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{x^2+2}$$

$$|PP_2|=\sqrt{(-x)^2+(\sqrt{2})^2+3^2}=\sqrt{x^2+11}$$

因为 $|PP_1|=\frac{1}{2}|PP_2|$，所以 $\sqrt{x^2+11}=2\sqrt{x^2+2}$，解得 $x=\pm1$。

于是所求点为：$(1,0,0)$，$(-1,0,0)$。

例 5-1-4 已知两点 $A(7,0,3)$ 和 $B(4,1,5)$，求 $\overrightarrow{AB}$、$|\overrightarrow{AB}|$ 及 $\overrightarrow{AB}$ 的单位向量 $\boldsymbol{e}_{AB}$。

解 因为

$$\overrightarrow{AB}=(4,1,5)-(7,0,3)=(-3,1,2)$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-3)^2+1^2+2^2}=\sqrt{14}$$

所以

$$\boldsymbol{e}_{AB}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(-3,1,2)$$

2. 方向角与方向余弦

已知，当把两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放到同一点时，两个向量之间的不超过 π 的夹角称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$。如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在 0 与 π 之间任意取值。

非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与 3 条坐标轴的夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**。

设 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，则

$$x=|\boldsymbol{r}|\cos\alpha,\quad y=|\boldsymbol{r}|\cos\beta,\quad z=|\boldsymbol{r}|\cos\gamma$$

$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**，于是

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}$$

从而有

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_r$$

上式表明，以向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_r$。因此

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

例 5-1-5 已知两点 $M_1(3,\sqrt{2},2)$，$M_2(4,0,1)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角。

解 由 $\overrightarrow{M_1M_2}=(4-3,0-\sqrt{2},1-2)=(1,-\sqrt{2},-1)$，得

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{2})^2+(-1)^2}=2$$

则

$$\cos\alpha=\frac{1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\beta=\frac{-\sqrt{2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\gamma=\frac{-1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=-\frac{1}{2}$$

于是有

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\quad \beta=\frac{3\pi}{4},\quad \gamma=\frac{2\pi}{3}$$

3. 向量在轴上的投影

设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定 u 轴。任给向量 $\boldsymbol{r}$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，再过点 M 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 M'（点 M' 称为点 M 在 u 轴上的投影），则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的分向量，如图 5-1-11 所示。设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$，则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$ 或 $(\boldsymbol{r})_u$。按此定义，向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的笛卡儿分量 a_x,a_y,a_z 就是 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影，即

$$a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a},\quad a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a},\quad a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}$$

图 5-1-11

向量的投影具有如下性质：

性质 5-1-1 $(\boldsymbol{a})_u=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$（即 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$），其中 φ 为向量与 u 轴的夹角。

性质 5-1-2 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_u=(\boldsymbol{a})_u+(\boldsymbol{b})_u$（即 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$）。

性质 5-1-3 $(\lambda\boldsymbol{a})_u=\lambda(\boldsymbol{a})_u$（即 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a})$）。

习题 5-1

1. 设 $\boldsymbol{a}=(1,-2,0)$，$\boldsymbol{b}=(3,2,1)$，求 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$。
2. 如果平面上的一个四边形可以被对角线平分，试用向量证明它是平行四边形。
3. 求解以向量为未知元的线性方程组 $\begin{cases}5\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}\\3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}\end{cases}$，其中 $\boldsymbol{a}=(0,1,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2,-3)$。
4. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限：
   $A(3,-1,2)$，$B(4,2,-2)$，$C(3,-5,-1)$，$D(-3,-1,2)$
5. 求证以 $M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$ 3 点为顶点的三角形是一个等腰三角形。

6. 求点 $A(2,-3,1)$ 到各坐标轴的距离。
7. 在 yOz 坐标平面上求与三点 $A(3,1,2),B(4,-2,-2),C(0,5,1)$ 等距离的点。
8. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(3,1,-2)$ 的单位向量。
9. 设已知两点 $A(3,\sqrt{2},1)$ 和 $B(4,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦和方向角。
10. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 2，它与 u 轴的夹角是 $\frac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影。

5.2 数量积和向量积

5.2.1 两向量的数量积

当某一物体在恒力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2，以 $\boldsymbol{s}$ 表示位移 $\overrightarrow{M_1M_2}$。由物理学知道，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$$

其中，θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角。

类似地，有时要对两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 作这样的运算，此运算的结果是一个数，它等于 $|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$ 及它们的夹角 θ 的余弦的乘积，把它称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

由于 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{O}$ 时，$|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 是向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影，于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$。

同理，当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{O}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$。

由数量积的定义可得如下性质。

性质 5-2-1 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$。

因为夹角 $\theta=0$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2$。

性质 5-2-2 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；反之，如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。

因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，且 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$，所以 $\cos\theta=0$，即 $\theta=\frac{\pi}{2}$，也就是 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；反之，如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，那么 $\theta=\frac{\pi}{2}$，$\cos\theta=0$，于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$。

由于可认为零向量与任何向量都垂直，则可得 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。

数量积符合下列运算律。

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；

(3) 结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，$\lambda,\mu$ 为数。

证明 (1) 根据定义可得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}),\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}}),$$

因为 $$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|$$

且 $$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\cos(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$$

所以 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$

(2) 当 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{O}$ 时,等式显然成立;当 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{O}$ 时,有

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|\,\mathrm{Prj}_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

由投影的性质,可知 $\mathrm{Prj}_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{b}$,所以

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|(\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{c}|\,\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\,\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$

(3) 此规律由数量积性质及投影性质易得,这里不予证明。

证毕。

下面推导数量积的坐标表示式。

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,按数量积的运算规律可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}\\&\quad+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是互相垂直的单位向量,所以

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$$
$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$$

从而得 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$,所以当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{O}$,$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{O}$ 时,有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ \sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

例 5-2-1 已知三点 $M(2,0,1)$,$A(3,1,1)$ 和 $B(2,1,2)$,求 $\angle AMB$。

解 作向量 $\overrightarrow{MA}$,$\overrightarrow{MB}$,$\angle AMB$ 就是向量 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的夹角。

$$\overrightarrow{MA}=(1,1,0),\quad \overrightarrow{MB}=(0,1,1)$$

因为 $$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=1\times0+1\times1+0\times1=1$$
$$|\overrightarrow{MA}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$$
$$|\overrightarrow{MB}|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

所以 $$\cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

从而 $$\angle AMB=\frac{\pi}{3}$$

5.2.2 两向量的向量积

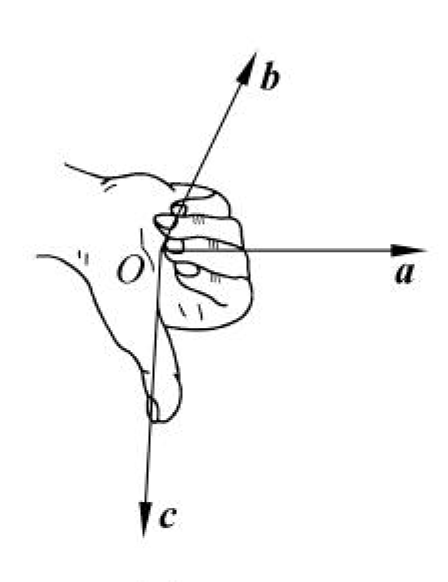


图 5-2-1

设向量 $\boldsymbol{c}$ 是由两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 按下列方式定出:

$\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角,$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面,$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定,如图 5-2-1 所示。即以右手握住向量 $\boldsymbol{c}$ 所在的轴,当右手的四个手

指从向量 $\boldsymbol{a}$ 方向以不超过 π 的角度转向向量 $\boldsymbol{b}$ 方向时，大拇指的指向就是向量 $\boldsymbol{c}$ 的方向。则向量 $\boldsymbol{c}$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

由向量积的定义可得如下性质。

性质 5-2-3 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{O}$。

因为夹角 $\theta=0$，所以 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|^2\sin 0=0$，所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{O}$。

性质 5-2-4 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；反之，如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{O}$。

如果认为零向量与任何向量都平行，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{O}$。

因为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{O}$，且 $|\boldsymbol{a}|\neq 0,|\boldsymbol{b}|\neq 0$，所以 $\sin\theta=0$，即 $\theta=0$ 或 π，也就是 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；反之，如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，那么 $\theta=0$ 或 π，于是 $\sin\theta=0$，从而 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{O}$。

向量积符合下列运算规律。

(1) 反交换律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$（用右手规则即可证明）；

(2) 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$；

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$（$\lambda$ 为数）。

这 3 个规律这里不予证明。

下面推导向量积的坐标表示式。

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，按向量积的运算规律可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}\\&\quad+a_yb_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{O}$， $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$， $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$， $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}$， $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}$， $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$

所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$

为了帮助记忆，利用 3 阶行列式符号，可将上式写成

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

例 5-2-2 设 $\boldsymbol{a}=(1,2,-3)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1,1)$，计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$。

解 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&-3\\2&-1&1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}-4\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$

例 5-2-3 已知△ABC 的顶点分别是 $A(1,1,0)$，$B(2,4,5)$，$C(3,6,7)$，求△ABC 的面积。

解 根据向量积的定义，可知△ABC 的面积

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

由于$\overrightarrow{AB}=(1,3,5)$，$\overrightarrow{AC}=(2,5,7)$，因此

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}=-4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}=(-4,3,-1)$$

于是
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+3^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$$

习题 5-2

1. 设 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量，$\boldsymbol{b}=(2,-1,0)$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$。
2. 设 $|\boldsymbol{a}|=2$，$\boldsymbol{b}$ 为单位向量，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $30°$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$。
3. 设 $\boldsymbol{a}=(2,-2,0)$，$\boldsymbol{b}=(-3,2,1)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$。
4. 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，$(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times 3\boldsymbol{b}$。
5. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$。
6. 已知 $M_1(1,-1,3)$，$M_2(2,1,4)$，$M_3(3,-2,5)$，求与$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_2M_3}$同时垂直的单位向量。
7. 已知三点 $O(1,1,1)$，$A(2,2,1)$，$B(2,1,2)$，求$\angle AOB$。
8. 求向量 $\boldsymbol{a}=(3,-2,5)$在向量 $\boldsymbol{b}=(2,2,4)$上的投影。
9. 已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OB}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求$\triangle OAB$ 的面积。
10. 设 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$，问 λ 与 μ 有怎样的关系，能使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直？

5.3　曲面及其方程

5.3.1　曲面方程的概念

在空间解析几何中，任何曲面都可以看作点的几何轨迹。在这样的意义下，如果曲面 S 与三元方程 $F(x,y,z)=0$ 有下述关系。

(1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$；

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程 $F(x,y,z)=0$，

则方程 $F(x,y,z)=0$ 叫作**曲面 S 的方程**，而曲面 S 叫作**方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形**，如图 5-3-1 所示。

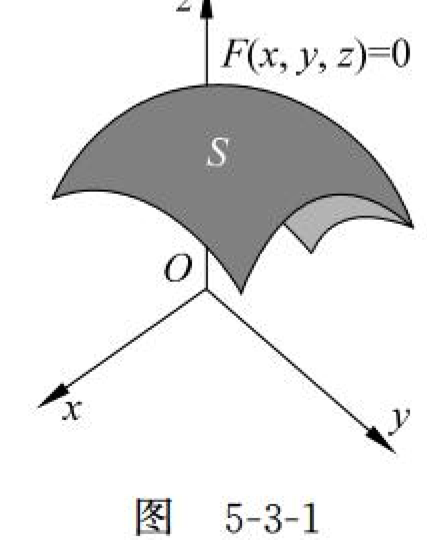


图　5-3-1

下面举例介绍常见的曲面的方程。

例 5-3-1　建立球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为 R 的球面的方程。

解　设 $M(x,y,z)$是球面上的任一点，那么

$$|M_0M|=R$$

即
$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

或
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

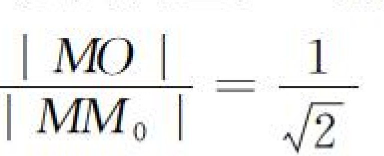
这就是球面上的点的坐标所满足的方程，而不在球面上的点的坐标都不满足这个方程，所以
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$
就是球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为 R 的球面的方程。

特殊地，球心在原点 $O(0,0,0)$、半径为 R 的球面（如图 5-3-2 所示）的方程为
$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

图 5-3-2

例 5-3-2 求与原点 O 及 $M_0(1,3,6)$ 的距离之比为 $1:\sqrt{2}$ 的点的全体所组成的曲面方程。

解 设 $M(x,y,z)$ 是曲面上任一点，根据题意有



$$\frac{|MO|}{|MM_0|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

即
$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2+(z-6)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

所求方程为 $(x+1)^2+(y+3)^2+(z+6)^2=92$

这就是所求曲面上的点的坐标所满足的方程，而不在此曲面上的点的坐标都不满足这个方程，所以这个方程就是所求曲面的方程。

在空间解析几何中，关于曲面的研究有下列两个基本问题：

(1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时，建立该曲面的方程；

(2) 已知坐标 x、y 和 z 间的一个方程时，研究该方程所表示的曲面的形状。

上述两例是已知曲面几何轨迹时，建立该曲面的方程的例子。下面举一个已知方程研究它所表示的曲面的例子。

例 5-3-3 方程 $x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z-3=0$ 表示怎样的曲面？

解 通过配方，原方程可以改写成
$$(x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=17$$
这是一个球面方程，球心在点 $M_0(-2,1,-3)$，半径为 $R=\sqrt{17}$。

一般地，设有三元二次方程 $Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz+G=0$，该方程的特点是缺 xy,yz,zx 各项，而且平方项系数相同，只要将该方程经过配方就可以转换成方程
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$
的形式，那么它的图形就是一个球面。

5.3.2 旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫作**旋转曲面**，旋转曲线叫作旋转曲面的**母线**，而这条定直线叫作旋转曲面的**轴**。

设在 yOz 坐标面上有一已知曲线 C，它的方程为

$$f(y,z)=0$$

把该曲线绕 z 轴旋转一周，就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面，如图 5-3-3 所示。它的方程可以通过如下方法求得。

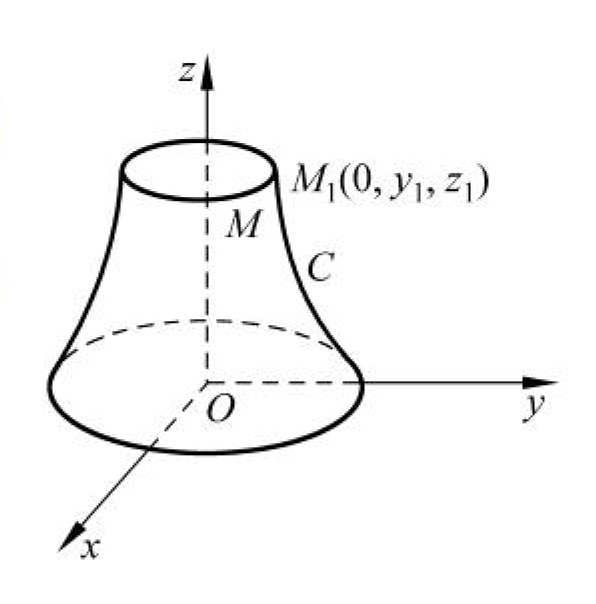


图　5-3-3

设 $M(x,y,z)$ 为曲面上的任一点，它是曲线 C 上的点 $M_1(0,y_1,z_1)$ 绕 z 轴旋转而得到的，因此有如下关系等式

$$f(y_1,z_1)=0,\quad z=z_1,\quad |y_1|=\sqrt{x^2+y^2}$$

从而得　　$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$

这就是所求旋转曲面的方程。

在曲线 C 的方程 $f(y,z)=0$ 中，将 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，便得曲线 C 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

同理，曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

例 5-3-4　直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周，所得的旋转曲面叫作**圆锥面**。两直线的交点叫作圆锥面的**顶点**，两直线的夹角 $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 叫做圆锥面的**半顶角**。试建立顶点在坐标原点 O，旋转轴为 z 轴，半顶角为 α 的圆锥面（如图 5-3-4 所示）的方程。

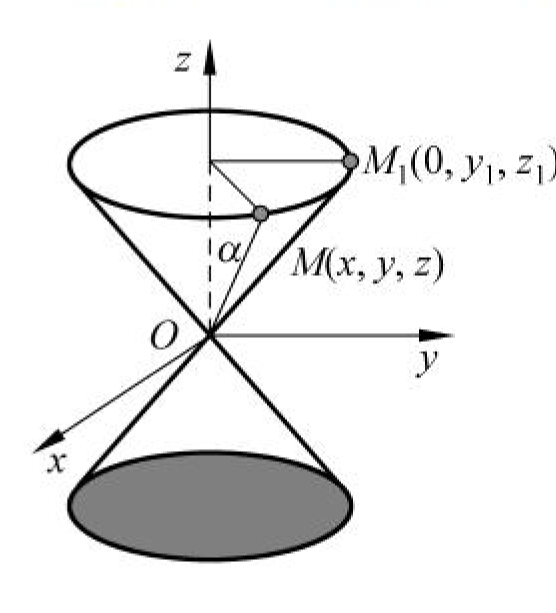


图　5-3-4

解　在 yOz 坐标面内，直线 L 的方程为

$$z=y\cot\alpha$$

将方程 $z=y\cot\alpha$ 中的 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，就得到所要求的圆锥面的方程

$$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha$$

或　$$z^2=a^2(x^2+y^2)$$

其中，$a=\cot\alpha$。

例 5-3-5　将 xOz 坐标面上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程。

解　绕 x 轴旋转所生成的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$

该曲面叫作**旋转双叶双曲面**，如图 5-3-5 所示。

绕 z 轴旋转所生成的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

该曲面叫作**旋转单叶双曲面**，如图 5-3-6 所示。

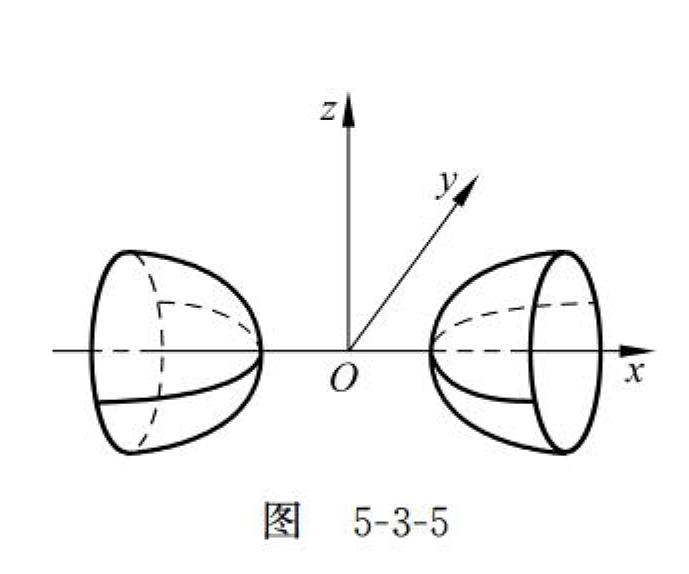


图 5-3-5

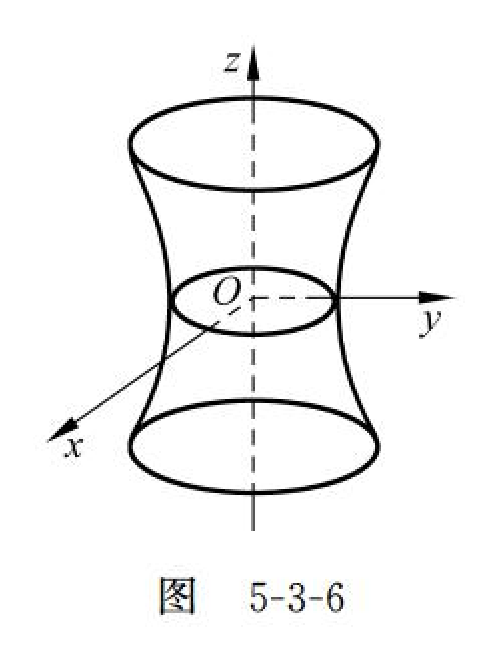


图 5-3-6

5.3.3 柱面

下面通过例题来了解柱面的定义。

例 5-3-6 方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示怎样的曲面？

解 在空间直角坐标系中，过 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 作平行于 z 轴的直线 L，则直线 L 上的点都满足方程 $x^2+y^2=R^2$，因此直线 L 一定在 $x^2+y^2=R^2$ 表示的曲面上。所以这个曲面可以看作由平行于 z 轴的直线 L 沿 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 移动而形成的。该曲面叫作**圆柱面**，如图 5-3-7 所示，xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 叫作它的**准线**，平行于 z 轴的直线 L 叫作它的**母线**。

一般地，平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹叫作柱面，定曲线 C 叫做柱面的准线，动直线 L 叫作柱面的母线。可以看出，不含 z 的方程 $x^2+y^2=R^2$ 在空间直角坐标系中表示圆柱面，它的母线平行于 z 轴，它的准线是 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$。

一般地，只含 x、y 而缺 z 的方程 $F(x,y)=0$，在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面，其准线是 xOy 面上的曲线 C：$F(x,y)=0$。

类似地，只含 x、z 而缺 y 的方程 $G(x,z)=0$ 和只含 y，z 而缺 x 的方程 $H(y,z)=0$ 分别表示母线平行于 y 轴和 x 轴的柱面。

例如，方程 $y^2=2x$ 表示母线平行于 z 轴的柱面，它的准线是 xOy 面上的抛物线 $y^2=2x$，该柱面叫作**抛物柱面**，如图 5-3-8 所示。

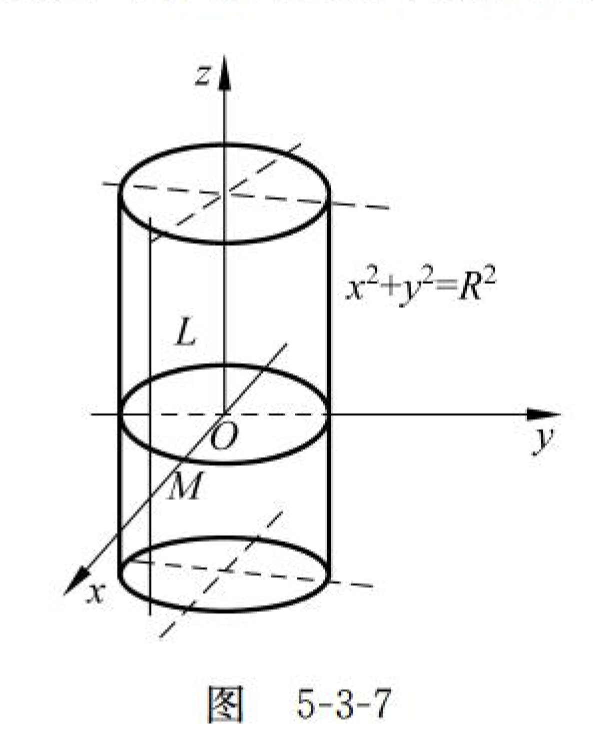


图 5-3-7

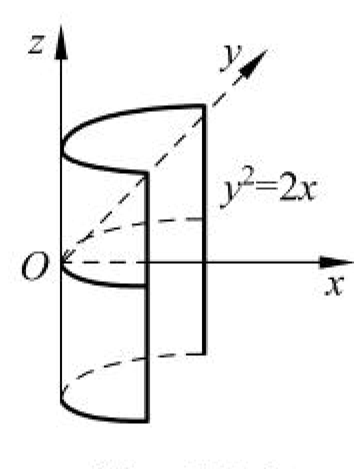


图 5-3-8

又如,方程 $x-z=0$ 表示母线平行于 y 轴的柱面,其准线是 zOx 面上的直线 $x-z=0$,所以它是过 y 轴的平面。而方程 $y-z=0$ 表示母线平行于 x 轴的柱面,其准线是 yOz 面的直线 $y-z=0$,所以它是过 x 轴的平面。

5.3.4 二次曲面

与平面解析几何中规定的二次曲线相类似,通常把三元二次方程所表示的曲面叫作**二次曲面**,把平面叫作**一次曲面**。

二次曲面有 9 种,下面就 9 种二次曲面的标准方程来讨论二次曲面的形状。

1. 椭圆锥面

由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$ 所表示的曲面称为椭圆锥面,如图 5-3-9 所示。

2. 椭球面

由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所表示的曲面称为椭球面,如图 5-3-10 所示。

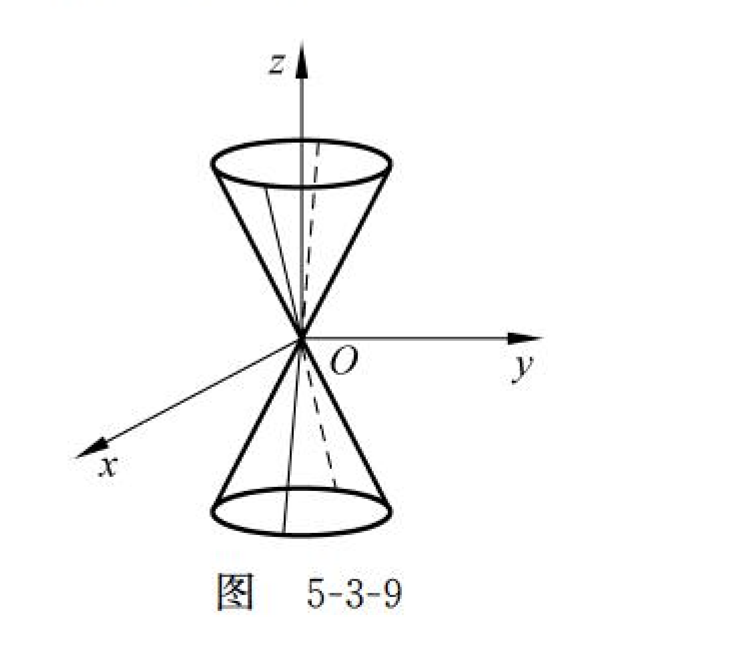


图 5-3-9

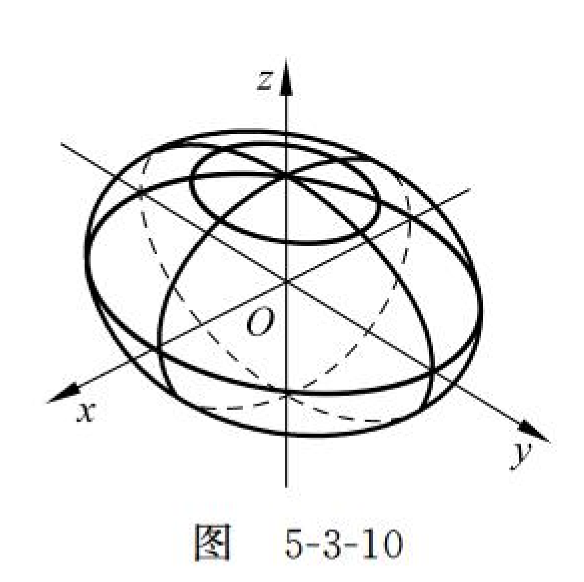


图 5-3-10

3. 单叶双曲面

由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 所表示的曲面称为单叶双曲面。

4. 双叶双曲面

由方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 所表示的曲面称为双叶双曲面。

5. 椭圆抛物面

由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ 所表示的曲面称为椭圆抛物面。

6. 双曲抛物面

由方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$ 所表示的曲面称为双曲抛物面。双曲抛物面又称**马鞍面**,如

图 5-3-11 所示。

还有 3 种二次曲面是以 3 种二次曲线为准线的柱面：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad x^2=ay$$

依次称为**椭圆柱面**、**双曲柱面**、**抛物柱面**。

图 5-3-11

习题 5-3

1. 某一动点到两定点 $A(4,5,6)$ 和 $B(2,3,1)$ 的距离相等，求该动点的轨迹方程。

2. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-5=0$ 表示怎样的曲面？

3. 将 xOz 坐标平面上的抛物线 $z^2=3x$ 绕 x 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程。

4. 将 xOz 坐标平面上的双曲线 $2x^2-z^2=15$ 分别绕 x 轴及 z 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程。

5. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形。

(1) $x=1$　　(2) $y=2x-1$

(3) $x^2+y^2=1$　　(4) $x^2-y^2=4$

6. 说明下列旋转曲面是怎样形成的。

(1) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{9}=1$　　(2) $x^2-\frac{y^2}{3}+z^2=1$

5.4 空间曲线及其方程

5.4.1 空间曲线的一般方程

空间曲线可以看作两个曲面的交线。设 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 是两个曲面方程，它们的交线为 C，如图 5-4-1 所示，因为曲线 C 上的任何点的坐标应同时满足这两个方程，所以应满足方程组

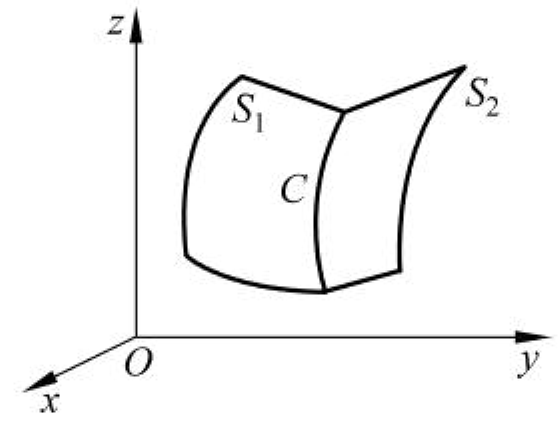


图 5-4-1

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

反之，如果点 M 不在曲线 C 上，那么它不可能同时在两个曲面上，所以它的坐标不满足方程组。

因此，曲线 C 可以用上述方程组来表示。上述方程组叫作**空间曲线 C 的一般方程**。

例 5-4-1 方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=4\\x+2z=8\end{cases}$ 表示怎样的曲线？

解 方程组中的第一个方程表示母线平行于 z 轴的圆柱面，其准线是 xOy 面上的圆，圆心在原点 O，半径为 2。方程组中的第二个方程表示一个母线平行于 y 轴的柱面，由于它的准线是 zOx 面上的直线，因此它是一个平面。方程组就表示上述平面与圆柱面的交线。

例 5-4-2　方程组 $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ \left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \end{cases}$ 在第一卦限部分表示怎样的曲线？

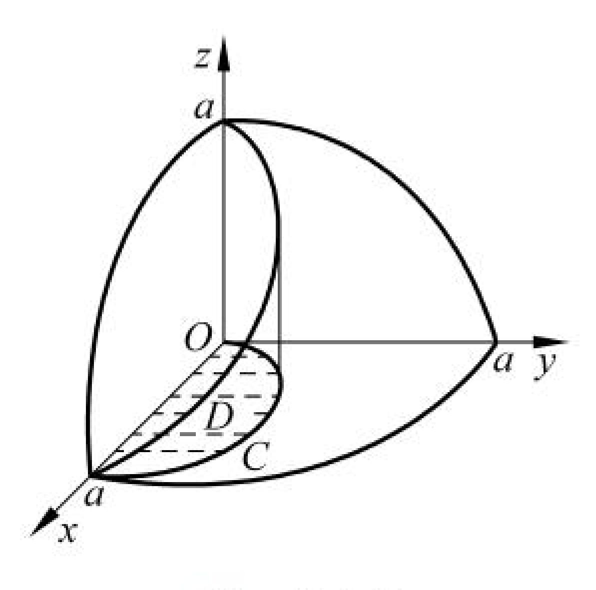


图　5-4-2

解　方程组中第一个方程表示球心在坐标原点 O，半行为 a 的上半球面。第二个方程表示母线平行于 z 轴的圆柱面，它的准线是 xOy 面上的圆，该圆的圆心在点 $\left(\dfrac{a}{2},0\right)$，半径为 $\dfrac{a}{2}$。方程组在第一卦限部分表示上述半球面与圆柱面在第一卦限的交线，如图 5-4-2 所示。

5.4.2　空间曲线的参数方程

空间曲线 C 的方程除了一般方程之外，也可以用参数形式表示，只要将 C 上动点的坐标 x、y、z 表示为参数 t 的函数：

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \tag{5-4-1}$$

当给定 $t=t_1$ 时，就得到 C 上的一个点 (x_1,y_1,z_1)；随着 t 的变动便得曲线 C 上的全部点。方程组(5-4-1)叫作**空间曲线的参数方程**。

例 5-4-3　如果空间中的点 M 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升(其中 ω、v 都是常数)，那么点 M 构成的图形叫作**螺旋线**。试建立其参数方程。

图　5-4-3

解　取时间 t 为参数。设当 $t=0$ 时，动点位于 x 轴上的一点 $A(a,0,0)$ 处。经过时间 t，动点由 A 运动到 $M(x,y,z)$，如图 5-4-3 所示。记 M 在 xOy 面上的投影为 M'，则 M' 的坐标为 $(x,y,0)$。由于动点在圆柱面上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，所以经过时间 t，$\angle AOM'=\omega t$。从而有

$$x=|OM'|\cos\angle AOM'=a\cos\omega t$$
$$y=|OM'|\sin\angle AOM'=a\sin\omega t$$

由于动点同时以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升，所以

$$z=MM'=vt$$

因此螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t \\ z=vt \end{cases}$$

也可以用其他变量作参数。例如，令 $\theta=\omega t$，则螺旋线的参数方程可写为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases}$$

其中，$b=\dfrac{v}{\omega}$，而参数为 θ。

螺旋线是实践中常用的曲线。当 OM' 转过一周时，M 点就上升固定的高度 $h=2\pi b$，这个高度在工程技术上叫作**螺距**。

5.4.3　空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 C 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{5-4-2}$$

将方程组(5-4-2)消去变量 z 后得到方程

$$H(x,y) = 0$$

由于方程 $H(x,y)=0$ 表示一个母线平行于 z 轴的柱面，而其同时又是由方程组消去变量 z 后所得的，因此当 x,y,z 满足方程组(5-4-2)时，前两个参数 x,y 必定满足方程 $H(x,y)=0$，这就说明曲线 C 上的所有点都在方程 $H(x,y)=0$ 所表示的曲面上。

由于曲线 C 在方程 $H(x,y)=0$ 表示的柱面上，而以曲线 C 为准线、母线平行于 z 轴的柱面叫作曲线 C 关于 xOy 面的**投影柱面**，投影柱面与 xOy 面的交线叫作空间曲线 C 在 xOy 面上的**投影曲线**，简称**投影**。因此，方程 $H(x,y)=0$ 表示的柱面必定包含投影柱面，而方程

$$\begin{cases} H(x,y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

所表示的曲线必定包含空间曲线 C 在 xOy 面上的投影。

类似地，可以定义曲线 C 在其他坐标面上的投影：消去方程组(5-4-2)中的变量 x 或变量 y，再分别和 $x=0$ 或 $y=0$ 联立，即可得到包含曲线 C 在 yOz 面或 zOx 面的投影的曲面方程：

$$\begin{cases} R(y,z) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} T(x,z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

例 5-4-4　已知两个球面的方程分别为

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{5-4-3}$$

和

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1 \tag{5-4-4}$$

求它们的交线 C 在 yOz 面上的投影方程。

解　先求包含交线 C 而母线平行于 x 轴的柱面方程，因此要由方程(5-4-3)和方程(5-4-4)消去 x，并化简得

$$x + y = 1$$

将 $x=1-y$ 代入方程(5-4-3)或方程(5-4-4)即得所求的柱面方程为

$$2y^2-2y+z^2=0$$

这就是交线 C 关于 yOz 面的投影柱面方程。两球面的交线 C 在 yOz 面上的投影方程为

$$\begin{cases}2y^2-2y+z^2=0\\x=0\end{cases}$$

例 5-4-5　求由上半球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体(如图 5-4-4 所示)在 xOy 面上的投影。

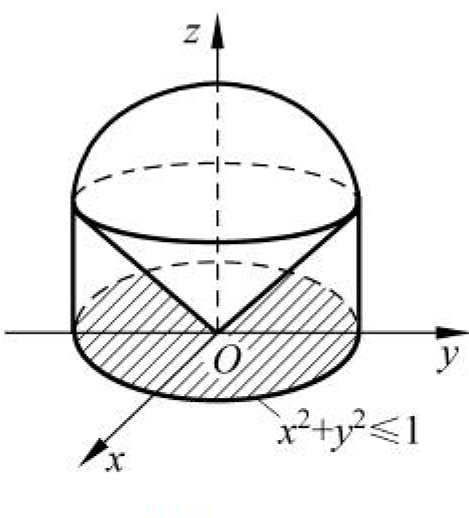


图　5-4-4

解　由方程 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 消去 z 得到 $x^2+y^2=1$。这是一个母线平行于 z 轴的圆柱面。容易看出，这恰好是半球面与锥面的交线 C 关于 xOy 面的投影柱面，因此交线 C 在 xOy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\z=0\end{cases}$$

这是 xOy 面上的一个圆，于是所求立体在 xOy 面上的投影，就是该圆在 xOy 面上所围的部分：

$$x^2+y^2\leqslant 1$$

习题 5-4

1. 求母线平行于 y 轴而通过曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=7\\2x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 的柱面方程。

2. 指出下列方程组在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形。

(1) $\begin{cases}y=2x+7\\y=3x-2\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x^2+y^2=4\\x=2\end{cases}$

3. 求球面 $x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1$ 与平面 $y-z=2$ 的交线在 xOy 面上的投影的方程。

4. 求圆柱面 $x^2+y^2=4$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 yOz 面上的投影的方程。

5. 求上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 的交线在 zOx 坐标平面上的投影的方程。

6. 将下列曲线的一般方程转换为参数方程。

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\z=x\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1\\x=0\end{cases}$

7. 求螺旋线 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=a\sin\theta\\z=b\theta\end{cases}$ 在 3 个坐标面上的投影的方程。

5.5 平面及其方程

5.5.1 平面的点法式方程

如果一非零向量垂直于一平面，该向量就叫作该**平面的法线向量**。容易知道，平面上的任一向量均与该平面的法线向量垂直。

由于过空间的一点可以而且只能作一平面垂直于一已知直线，因此当平面 Π 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和它的一个法线向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为已知时，平面 Π 的位置就完全确定了。下面我们来建立平面 Π 的方程。

设 $M(x,y,z)$ 是平面 Π 上的任一点（如图 5-5-1 所示），那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 必与平面 Π 的法线向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直，即它们的数量积等于零：

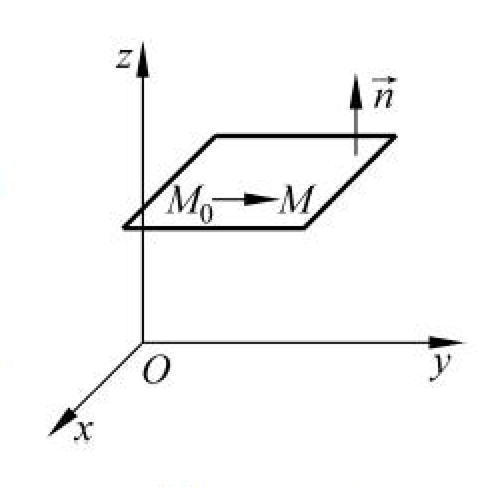


图 5-5-1

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$$

由于 $\boldsymbol{n}=(A,B,C),\quad \overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$

所以

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{5-5-1}$$

这就是平面 Π 上任一点 M 的坐标 x,y,z 所满足的方程。

反过来，如果 $M(x,y,z)$ 不在平面 Π 上，那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与法线向量 $\boldsymbol{n}$ 不垂直，从而 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}\neq 0$，即不在平面 Π 上的点 M 的坐标 x,y,z 不满足方程(5-5-1)。

由此可知，方程(5-5-1)就是平面 Π 的方程，而平面 Π 就是方程(5-5-1)的图形。由于方程(5-5-1)是由平面 Π 上的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 及它的一个法线向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 确定的，所以此方程叫作**平面的点法式方程**。

例 5-5-1 求过点(1,0,−2)且以 $\boldsymbol{n}=(1,2,3)$ 为法线向量的平面的方程。

解 根据平面的点法式方程，得所求平面的方程为

$$(x-1)+2y+3(z+2)=0$$

即

$$x+2y+3z+5=0$$

例 5-5-2 求过三点 $A(1,-1,1)$，$B(-1,0,2)$ 和 $C(0,1,3)$ 的平面的方程。

解 我们可以用 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 作为平面的法线向量 $\boldsymbol{n}$。

因为 $\overrightarrow{AB}=(-2,1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,2,2)$，所以

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}=3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}=(0,3,-3)$$

根据平面的点法式方程，得所求平面的方程为

$$0(x-1)+3(y+1)-3(z-1)=0$$

即
$$3y-3z+6=0$$

5.5.2　平面的一般方程

由于平面的点法式方程(5-5-1)是 x,y,z 的一次方程，而任一平面都可以用它上面的一点及它的法线向量来确定，所以任一平面都可以用三元一次方程来表示。

反过来，设有三元一次方程
$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{5-5-2}$$
任取满足该方程的一组数 x_0,y_0,z_0，即有
$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

把上述两等式相减，得
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

这正是通过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且以 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为法线向量的平面方程。由于方程
$$Ax+By+Cz+D=0$$
与方程
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$
同解，所以任一三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 的图形总是一个平面。方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 称为**平面的一般方程**，其中 x,y,z 的系数就是该平面的一个法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的坐标，即 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$。

例如，方程 $2x+y-4z+8=0$ 表示一个平面 $\boldsymbol{n}=(2,1,-4)$ 是这平面的一个法线向量。

对于一些特殊的三元一次方程，应该熟悉它们的图形特点。

当 $D=0$ 时，方程(5-5-2)成为 $Ax+By+Cz=0$，它表示一个通过原点的平面。

当 $A=0$ 时，方程(5-5-2)成为 $By+Cz+D=0$，法线向量 $\boldsymbol{n}=(0,B,C)$ 垂直于 x 轴，它表示一个平行于 x 轴的平面。

当 $B=0$ 时，方程(5-5-2)成为 $Ax+Cz+D=0$，法线向量 $\boldsymbol{n}=(A,0,C)$ 垂直于 y 轴，它表示一个平行于 y 轴的平面。

当 $C=0$ 时，方程(5-5-2)成为 $Ax+By+D=0$，法线向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,0)$ 垂直于 z 轴，它表示一个平行于 z 轴的平面。

当 $A=B=0$ 时，方程(5-5-2)成为 $Cz+D=0$，法线向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,C)$ 同时垂直于 x 轴和 y 轴，它表示一个平行于 xOy 面的平面。

当 $B=C=0$ 时，方程(5-5-2)成为 $Ax+D=0$，法线向量 $\boldsymbol{n}=(A,0,0)$ 同时垂直于 y 轴和 z 轴，它表示一个平行于 yOz 面的平面。

当 $A=C=0$ 时，方程(5-5-2)成为 $By+D=0$，法线向量 $\boldsymbol{n}=(0,B,0)$ 同时垂直于 x 轴和 z 轴，它表示一个平行于 xOz 面的平面。

例 5-5-3　求通过 y 轴和点 $(-3,-1,1)$ 的平面的方程。

解　平面通过 y 轴，一方面表明它的法线向量垂直于 y 轴，即 $B=0$；另一方面表明它必通过原点，即 $D=0$。因此可设该平面的方程为

$$Ax + Cz = 0$$

又因为该平面通过点$(-3,-1,1)$，所以有

$$-3A + C = 0$$

或

$$C = 3A$$

将其代入所设方程并除以$A(A\neq 0)$，便得所求的平面方程为

$$x + 3z = 0$$

例 5-5-4 设一平面与x、y、z轴的交点依次为$P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$三点，如图 5-5-2 所示。求该平面的方程(其中$a\neq 0,b\neq 0,c\neq 0$)。



图 5-5-2

解 解法 1：设所求平面的方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

因为点$P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$都在该平面上，所以点P，Q，R的坐标都满足所设方程，即有

$$\begin{cases} aA + D = 0 \\ bB + D = 0 \\ cC + D = 0 \end{cases}$$

由此得

$$A = -\frac{D}{a},\quad B = -\frac{D}{b},\quad C = -\frac{D}{c}$$

将其代入所设方程，得

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0$$

即

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

解法 2：因为$\overrightarrow{PQ} = (-a,b,0)$，$\overrightarrow{PR} = (-a,0,c)$，则

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = bc\boldsymbol{i} + ac\boldsymbol{j} + ab\boldsymbol{k} = (bc,ac,ab)$$

根据平面的点法式方程，可得

$$bc(x - a) + ac(y - 0) + ab(z - 0) = 0$$

方程两端同时除以abc，即得

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

上述方程叫作**平面的截距式方程**，而a，b，c依次叫作平面在x，y，z轴上的**截距**。

5.5.3 两平面的夹角

两平面的法线向量的夹角(通常指锐角)称为**两平面的夹角**。

设平面 Π_1 和 Π_2 的法线向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，那么平面 Π_1 和 Π_2 的夹角 θ 应是 $(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})$ 和 $(\widehat{-\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})=\pi-(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})$ 二者中的锐角，因此，$\cos\theta=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})|$。按两向量夹角余弦的坐标表示式，平面 Π_1 和 Π_2 的夹角 θ 可由

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

来确定。

从两向量垂直、平行的充分必要条件立即推得下列结论。

(1) 平面 Π_1 和 Π_2 垂直，相当于 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$。

(2) 平面 Π_1 和 Π_2 平行或重合，相当于 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$。

例 5-5-5　求两平面 $x-y+\sqrt{2}z-3=0$ 和 $x+y+\sqrt{2}z+5=0$ 的夹角。

解　由已知，可得 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,\sqrt{2})$，$\boldsymbol{n}_2=(1,1,\sqrt{2})$，则有

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\\&=\frac{|1\times1+(-1)\times1+\sqrt{2}\times\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(\sqrt{2})^2}\times\sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{2})^2}}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

所以，所求夹角为 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$。

例 5-5-6　设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外的一点，求 P_0 到该平面的距离，如图 5-5-3 所示。

解　设 $\boldsymbol{e}_n$ 是平面上的单位法线向量。在平面上任取一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，则 P_0 到该平面的距离为

$$d=|\mathrm{Prj}_n\overrightarrow{P_1P_0}|$$

则有
$$\mathrm{Prj}_n\overrightarrow{P_1P_0}=\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{e}_n$$

而
$$\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,B,C)$$

$$\overrightarrow{P_1P_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)$$

图　5-5-3

得
$$\begin{aligned}\mathrm{Prj}_n\overrightarrow{P_1P_0}=\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{e}_n&=\frac{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\&=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\end{aligned}$$

由于 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 是平面上的点，即

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$

于是
$$\mathrm{Prj}_n \overrightarrow{P_1P_0}=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$
从而得到平面外任一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式为
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

例 5-5-7 求点 $(-1,2,1)$ 到平面 $3x-2y+z+1=0$ 的距离。

解 利用点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式进行计算：
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|3\times(-1)+(-2)\times2+1\times1+1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}}$$
$$=\frac{5}{\sqrt{14}}$$

习题 5-5

1. 求过点 $(1,2,3)$ 且与平面 $x-2y+4z+3=0$ 平行的平面的方程。
2. 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$ 且垂直于平面 $x+y+z=0$，求它的方程。
3. 求过点 $M_0(1,3,-2)$ 与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程。
4. 指出下列各平面的特殊位置，并画出各平面。

(1) $x=0$　　(2) $2y-1=0$

(3) $y+z=2$　　(4) $x-z=0$

5. 求平面 $4x+y-2z=0$ 与平面 $2x-y+3z=0$ 的夹角。
6. 求平行于 x 轴且过点 $A(3,0,-2)$，$B(-1,1,2)$ 的平面方程。
7. 求通过 z 轴且过点 $M(2,-4,3)$ 的平面方程。
8. 求平行于 xOz 平面且经过点 $(1,-1,2)$ 的平面方程。
9. 求过点 $(1,1,4)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2,0)$，$\boldsymbol{b}=(-1,3,4)$ 的平面方程。
10. 已知一平面过三点 $A(1,1,-1)$，$B(1,-1,2)$，$C(-2,-2,2)$，求该平面的方程。
11. 求点 $(-1,3,2)$ 到平面 $x-2y+2z+9=0$ 的距离。

5.6 空间直线及其方程

5.6.1 空间直线的一般方程

设直线 L 是平面 Π_1 与平面 Π_2 的交线，如图 5-6-1 所示，平面 Π_1 与平面 Π_2 的方程分别为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，那么点 M 在直线 L 上当且仅当点 M 同时在这两个平面上，即当且仅当它的坐标同时满足这两个平面方程即方程组

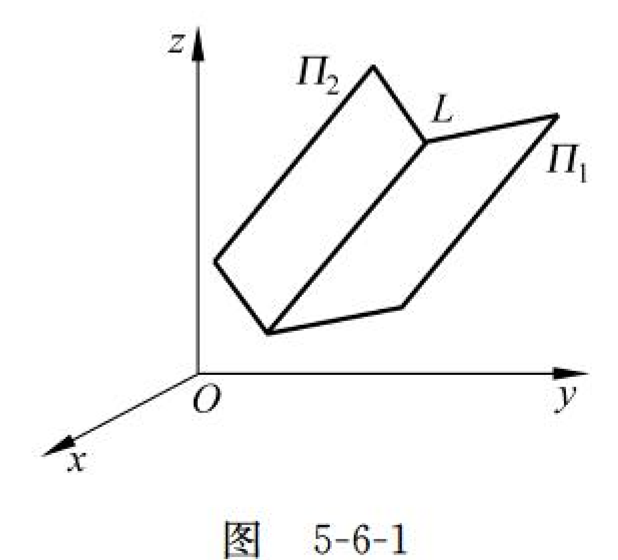


图　5-6-1

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{5-6-1}$$

时，点 M 在直线 L 上；反之，如果点 M 不在直线 L 上，那么它不可能同时在平面 Π_1 与平面 Π_2 上，所以它的坐标不满足方程组(5-6-1)。因此，直线 L 可以用方程组(5-6-1)来表示。上述方程组叫作**空间直线的一般方程**。

通过空间一直线 L 的平面有无限多个，只要在这无限多个平面中任意选取两个，把它们的方程联立起来，所得的方程组就表示空间直线 L。

5.6.2　空间直线的对称式方程与参数方程

如果一个非零向量平行于一条已知直线，这个向量就叫作这条直线的**方向向量**。容易知道，直线上任一向量都平行于该直线的方向向量。

由于过空间一点可作而且只能作一条直线平行于一已知直线，所以当直线 L 上一点 $M_0(x_0,y_0,x_0)$ 和它的一方向向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为已知时，直线 L 的位置就完全确定了。下面来建立此直线的方程。

设 $M(x,y,z)$ 是直线 L 上的任一点，那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 平行，如图 5-6-2 所示。所以，两向量的对应坐标成比例，由于 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，从而有

图　5-6-2

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{5-6-2}$$

注：当 m,n,p 中有一个为零，如 $m=0$，而 $n,p\neq 0$ 时，该方程组应理解为 $\begin{cases} x-x_0=1 \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases}$。当 m,n,p 中有两个为零，如 $m=n=0$，而 $p\neq 0$ 时，该方程组应理解为 $\begin{cases} x-x_0=0 \\ y-y_0=0 \end{cases}$。

反之，如果点 M 不在直线 L 上，则向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与方向向量 $\boldsymbol{s}$ 不平行。这两个向量的对应坐标就不成比例。因此，方程组(5-6-2)就是直线 L 的方程，叫作**直线的对称式方程**或**点向式方程**。

直线的任一方向向量 $\boldsymbol{s}$ 的坐标(m,n,p)叫作该直线的一组**方向数**，而向量 $\boldsymbol{s}$ 的方向余弦叫作该直线的**方向余弦**。

由直线的对称式方程容易导出直线的参数方程。

设 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$，即可得方程组

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

此方程组就是**直线的参数方程**。

例 5-6-1 用对称式方程及参数方程表示直线$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-2y+3z=4 \end{cases}$。

解 先求直线上的一点，取 $x=1$，有

$$\begin{cases} y-2z=0 \\ -2y+3z=3 \end{cases}$$

解此方程组，得 $y=-6$，$z=-3$，即$(1,-6,-3)$就是直线上的一点。

再求该直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$。由于两平面的交线与这两平面的法线向量 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,-2)$，$\boldsymbol{n}_2=(1,-2,3)$都垂直，所以可取

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$$

因此，所给直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+6}{-5}=\frac{z+3}{-3}$$

令$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+6}{-5}=\frac{z+3}{-3}=t$，得所给直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=-6-5t \\ z=-3-3t \end{cases}$$

5.6.3 两直线的夹角

两直线的方向向量的夹角（通常指锐角）叫作**两直线的夹角**。

设直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$和 $\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$，那么 L_1 和 L_2 的夹角 φ就是$(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})$和$(-\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})=\pi-(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})$两者中的锐角，因此，$\cos\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})|$. 根据两向量的夹角的余弦公式，直线 L_1 和 L_2 的夹角 φ 可由

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

来确定。

从两向量垂直、平行的充分必要条件可推出下列结论。

(1) 两直线 L_1 和 L_2 相互垂直相当于 $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$；

(2) 两直线 L_1 和 L_2 相互平行相当于$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$。

例 5-6-2 求直线 L_1：$\frac{x-2}{1}=\frac{y+5}{\sqrt{2}}=\frac{z+3}{1}$和 L_2：$\frac{x+6}{1}=\frac{y+2}{\sqrt{2}}=\frac{z-7}{-1}$的夹角。

解　两直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(1,\sqrt{2},1)$ 和 $\boldsymbol{s}_2=(1,\sqrt{2},-1)$。设两直线的夹角为 φ，则

$$\cos\varphi=\frac{|1\times1+\sqrt{2}\times\sqrt{2}+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+1^2}\times\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}$$

所以
$$\varphi=\frac{\pi}{3}$$

5.6.4　直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线的夹角 $\varphi\left(0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 称为**直线与平面的夹角**，如图 5-6-3 所示。当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{2}$。

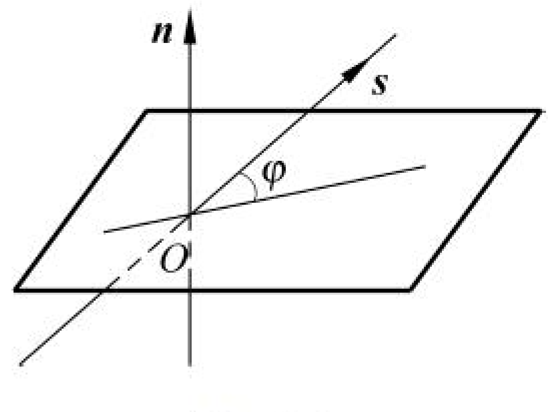


图　5-6-3

设直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，直线与平面的夹角为 φ，那么 $\varphi=\left|\frac{\pi}{2}-(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}})\right|$，因此，$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}})|$。按两向量夹角余弦的坐标表达式，有

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

因为直线与平面垂直相当于直线的方向向量与平面的法线向量平行，所以，直线与平面垂直相当于

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

因为直线与平面平行或直线在平面上相当于直线的方向向量与平面的法线向量垂直，所以，直线与平面平行或直线在平面上相当于

$$Am+Bn+Cp=0$$

例 5-6-3　求过点 $(1,0,-2)$ 且与平面 $3x+2y-z+7=0$ 垂直的直线的方程。

解　平面的法线向量 $(3,2,-1)$ 可作为所求直线的方向向量。由此可得所求直线的方程为

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-1}$$

例 5-6-4　求过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+4}{3}=\frac{z+1}{1}$ 垂直的平面方程。

解　因为所求平面与直线 $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+4}{3}=\frac{z+1}{1}$ 垂直，故可取平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(-1,3,1)$，又因为平面过点 $M(1,2,-1)$，根据点法式方程，可得

$$-1\times(x-1)+3\times(y-2)+1\times(z+1)=0$$

故所求平面方程为

$$x-3y-z+4=0$$

例 5-6-5 求过点$(-1,2,3)$且与两平面 $x-2y=5$ 和 $2x+y-3z=3$ 的交线平行的直线的方程。

解 平面 $x-2y=5$ 和 $2x+y-3z=3$ 的交线的方向向量就是所求直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$，而平面 $x-2y=5$ 和 $2x+y-3z=3$ 的法线向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(1,-2,0)$，$\boldsymbol{n}_2=(2,1,-3)$，于是

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$$

故所求直线的方程为

$$\frac{x+1}{6}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{5}$$

例 5-6-6 求直线$\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-6}{2}$与平面 $2x+3y-2z-4=0$ 的交点。

解 所给直线的参数方程为

$$x=3+t,\quad y=4+t,\quad z=6+2t$$

将其代入平面方程中，得

$$2(3+t)+3(4+t)-2(6+2t)-4=0$$

解该方程，得 $t=-2$。将 $t=-2$ 代入直线的参数方程，得所求交点的坐标为

$$x=1,\quad y=2,\quad z=2$$

例 5-6-7 求过点$(2,1,2)$且与直线$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$垂直相交的直线的方程。

解 过已知点与已知直线相垂直的平面的方程为

$$(x-2)+(y-1)+2(z-2)=0$$

即

$$x+y+2z=7$$

此平面与已知直线的交点为$(1,2,2)$。

所求直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(1,2,2)-(2,1,2)=(-1,1,0)$$

又因为直线过点$(2,1,2)$，根据点向式，可得所求直线的方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}\\ z-2=0\end{cases}$$

习题 5-6

1. 用对称式方程及参数方程表示直线$\begin{cases}x-y+3z=1\\ x-2y+z=6\end{cases}$。
2. 求过点$(1,2,3)$且与向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,2)$平行的直线方程。
3. 求过点$(1,3,-2)$且与向量 $\boldsymbol{a}=(0,0,3)$平行的直线方程。
4. 求过点$(-1,3,4)$且平行于直线$\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{5}$的直线方程。

5. 求过两点 $A(1,0,-2)$ 和 $B(3,2,-1)$ 的直线方程。

6. 求过点 $M(3,4,-1)$ 且与平面 $2x+y+5z-9=0$ 垂直的直线方程。

7. 求过点 $(3,0,-1)$ 且与直线 $\begin{cases}x-2y+4z-5=0\\3x+5y-2z+3=0\end{cases}$ 垂直的平面方程。

8. 求过点 $(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=3$ 和 $y-3z=1$ 平行的直线方程。

9. 求直线 $\begin{cases}2x+2y-z+5=0\\3x+8y+z-3=0\end{cases}$ 与直线 $\begin{cases}5x-3y+3z+2=0\\3x-2y+z-4=0\end{cases}$ 的夹角。

10. 求平面 $x+y-z+3=0$ 与直线 $\begin{cases}x-y+2z=0\\x+y-z=0\end{cases}$ 的夹角。

11. 试确定下列各组中的直线与平面间的关系。

(1) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{x}{5}$ 和 $2x-2y+5z=7$；

(2) $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-5}$ 和 $x+y+z=5$。

12. 求点 $(-1,0,2)$ 在平面 $x-2y+3z+2=0$ 上的投影。

第6章

多元函数微分学及其应用

前面几章我们讨论的函数都只有一个自变量，这种函数叫作一元函数。但在自然科学与工程技术，乃至经济生活等诸多实际问题中，往往牵涉多方面的因素，反映到数学上，就是一个变量依赖于多个变量的情形，这就提出了多元函数及多元函数的微分和积分问题。多元函数及其微积分是一元函数及其微积分的推广和发展，它们有许多类似之处，但有些地方则有着重大的差异。从一元推广到二元时会产生许多新问题，但由二元推广到三元或更多元时则不会出现本质的差异，因此讨论多元函数时着重讨论二元函数的情形。

6.1 多元函数的极限与连续性

6.1.1 多元函数的概念

1. 二元函数的定义

二元函数是指依赖于两个自变量的函数关系。

例如，设矩形的边长分别为 x 和 y，则矩形的面积 S 为

$$S = xy$$

其中，当 x 和 y 每取定一组值时，就有了确定的面积值 S，即 S 依赖于 x 和 y 的变化而变化。如果 x 和 y 有一个固定不变，则此时 S 只依赖于一个变量，也即为一元函数。

又如，在生产中，产量 Q 与投入的劳动力 L 和资金 K 之间有如下关系式：

$$Q = AL^{\alpha}K^{\beta} \tag{6-1-1}$$

其中，$A>0$，$\alpha>0$，$\beta>0$ 为常数，公式(6-1-1)称为**柯布—道格拉斯生产函数**。

定义 6-1-1 设 D 是 xOy 面上的区域，E 是一实数集，如果对于 D 中的每一个点 $P(x,y)$，按照某一对应关系 f，在集合 E 中都有唯一的一个实数 z 与之对应，则称 z **为变量 x、y 的二元函数**(**或点 P 的函数**)，记作

$$z = f(x,y) \quad 或 \quad z = f(P)$$

其中，x 和 y 称为**自变量**，z 称为**因变量**，区域 D 称为**函数的定义域**，f 称为**对应法则**。

该定义可以推广到三元或三元以上函数的情形，二元及二元以上的函数统称为多元函数，与一元函数相同，**多元函数也是由对应法则 f 和定义域 D 这两个因素完全决定的**。这里主要研究二元函数。

2. 二元函数的定义域

二元函数定义域的求法与一元函数类似。其定义域在几何上通常表示平面上的一个区域。

例 6-1-1　求函数 $z=\sqrt{x}+y^2$ 的定义域，并画出其所表示的平面区域。

解　要使该函数有意义，须满足

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}$$

所以该函数的定义域为

$$D=\{(x,y) \mid x \geqslant 0, -\infty < y < +\infty\}$$

其所表示的平面区域如图 6-1-1 中阴影部分所示。

图　6-1-1

例 6-1-2　求函数 $z=\dfrac{\ln(1-x-y)}{\sqrt{x^2+y^2-1}}+xy$ 的定义域，并画出其所表示的平面区域。

解　要使该函数有意义，须满足：

$$\begin{cases} 1-x-y>0 \\ \sqrt{x^2+y^2-1} \neq 0, \\ x^2+y^2-1 \geqslant 0 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x+y<1 \\ x^2+y^2>1 \end{cases}$$

所以该函数的定义域为

$$D=\{(x,y) \mid x+y<1, x^2+y^2>1\}$$

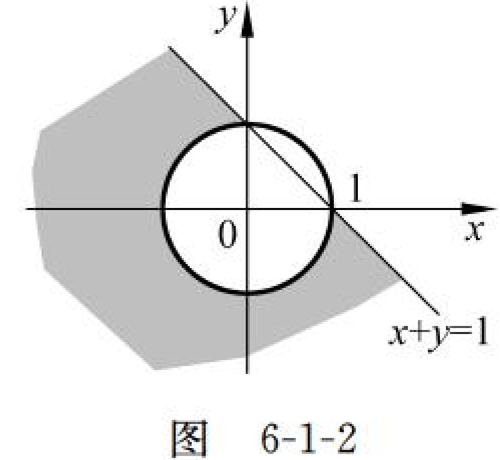


图　6-1-2

其所表示的平面区域如图 6-1-2 中阴影部分所示。

二元函数的定义域通常是平面上的区域，它往往是由一条或几条曲线所围成的。围成区域的曲线称为区域的边界，包含边界在内的区域称为**闭区域**，不含边界在内的区域称为**开区域**，如例 6-1-2 中的定义域就为开区域。如果一个区域可以全部包含在一个以原点为圆心，以适当大的正数为半径的圆内，则称该区域为**有界区域**，否则称为**无界区域**，如例 6-1-1 和例 6-1-2 中的区域都为无界区域。

3. 二元函数的几何意义

一元函数在几何上表示平面上的一条曲线，而二元函数 $z=f(x,y)$ 在几何上表示空间中的一个曲面。例如，二元函数 $z=x^2+y^2$ 的图形为旋转抛物面；二元函数 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(a>0)$ 的图形是球心在原点，半径为 a 的上半球面。二元函数的定义域 D 则是该曲面在 xOy 面上的投影，读者要认真领会它们的区别与联系。

4. 平面上的邻域

定义 6-1-2 设(x_0,y_0)为平面上一点，$\delta>0$，称集合

$$D=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

为点(x_0,y_0)的δ邻域，记作$U_\delta(x_0,y_0)$。

点(x_0,y_0)的δ邻域$U_\delta(x_0,y_0)$在几何上表示以点(x_0,y_0)为圆心，以δ为半径的圆内区域(不含圆周)，所以常称该邻域为开圆。

6.1.2 多元函数的极限与连续

1. 二元函数的极限

定义 6-1-3 如果当点(x,y)以任何方式趋于点(x_0,y_0)时，函数$z=f(x,y)$无限靠近于某一个常数A，则称A为当点(x,y)趋于点(x_0,y_0)时函数$f(x,y)$的极限(二重极限)，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$$

或

$$f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0))$$

关于该定义应注意以下两点。

(1) $(x,y)\to(x_0,y_0)$，即$x\to x_0$，$y\to y_0$或$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$。

(2) 虽然二元函数极限定义与一元函数极限定义很相似，但是它们又有很大的区别。在一元函数极限中，$x\to x_0$只有两种方式，即$x\to x_0^-$和$x\to x_0^+$。当且仅当左、右极限都存在且相等时，$x\to x_0$的极限存在。而在二元函数极限中，由于点(x,y)和(x_0,y_0)均是平面上的点，点(x,y)趋向于点(x_0,y_0)会有无数多条路线，而只有沿这无数多条路线的极限均存在且都相等时，二元函数的极限才存在。可见二元函数极限比一元函数的极限要复杂得多。

例 6-1-3 求$\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$。

解 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot y=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}y$

$=1\times 2=2$

***例 6-1-4** 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$在点$(0,0)$处有无极限。

解

① 当点$P(x,y)$沿x轴趋于点$(0,0)$时，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} 0=0$$

② 当点$P(x,y)$沿y轴趋于点$(0,0)$时，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

③ 当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时，以下极限与 k 的选取有关，因此，函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处无极限。

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

2. 二元函数的连续性

定义 6-1-4　如果函数 $f(x,y)$ 满足下列条件：

(1) 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义；

(2) 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，

则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，否则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点处不连续或间断。

类似于一元函数，如果二元函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的每一个点处都连续，则说二元函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，或者称 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数。

对于例 6-1-4，其定义域 $D=\mathbf{R}^2$，但 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限不存在，所以点 $O(0,0)$ 是该函数的一个间断点。

又如，函数 $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$，其定义域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 1\}$，记圆周 $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，则 $f(x,y)$ 在 C 上没有定义。当然，$f(x,y)$ 在 C 上各点处都不连续，所以圆周 C 上各点都是函数 $f(x,y)$ 的间断点。

注：间断点可能是孤立点，也可能是曲线上的每一个点。

可以证明，**多元连续函数的和、差、积仍为连续函数；连续函数的商在分母不为零处仍连续；多元连续函数的复合函数也是连续函数**。

与一元初等函数类似，**多元初等函数**是指可用一个式子表示的多元函数，这个式子是由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次复合运算而得到的。例如，$\dfrac{x+x^2-y^2}{1+y^2}$，$\sin(x^2y+\arctan y)$，$e^{x^2+y^2+z^2}$ 等都是多元初等函数。

一切多元初等函数在其定义区域内都是连续的。所谓定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域。

由多元连续函数的定义，如果要求多元连续函数 $f(P)$ 在点 P_0 处的极限，而该点又在此函数的定义区域内，则

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$$

例 6-1-5　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x+y}{xy}$。

解　函数 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy}$ 是初等函数，它的定义域为

$$D = \{(x,y) \mid x\neq 0, y\neq 0\}$$

$P_0(1,2)$ 在函数的定义区域内，因此

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)=f(1,2)=\frac{3}{2}$$

例 6-1-6 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$。

解 解法 1：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\frac{1}{2}$$

解法 2：令 $u=xy$，则当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$u\to0$，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim_{u\to0}\frac{\sqrt{u+1}-1}{u}=\lim_{u\to0}\frac{(\sqrt{u+1}-1)(\sqrt{u+1}+1)}{u(\sqrt{u+1}+1)}$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{1}{\sqrt{u+1}+1}=\frac{1}{2}$$

注：本题解法 2 表明，多元函数的极限问题有时可以转化为一元函数的极限问题。

3. 二元连续函数的性质

与闭区间上一元连续函数的性质相类似，在有界闭区域上连续的二元函数有如下性质。

性质 6-1-1（有界性与最大值最小值定理） 在有界闭区域 D 上连续的二元函数，必定在 D 上有界，且能取得它的最大值和最小值。

性质 6-1-1 就是说，若 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续，则必定存在常数 $M>0$，使得对一切 $P\in D$，有 $|f(P)|\leqslant M$；且存在 $P_1,P_2\in D$，使得

$$f(P_1)=\max\{f(P)\mid P\in D\}$$
$$f(P_2)=\min\{f(P)\mid P\in D\}$$

性质 6-1-2（介值定理） 在有界闭区域 D 上连续的二元函数必能取得介于最大值和最小值之间的任何值。

性质 6-1-2 就是说，若 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续，则对介于最大值和最小值之间的任何常数 C，存在 $P\in D$，使得 $f(P)=C$。

以上关于二元函数的极限和连续的讨论完全可以推广到三元及三元以上的函数。

习题 6-1

1. 已知圆锥的高为 h，母线长为 l，试用 h,l 表示圆锥的体积 V。

2. 设 $f(u,v)=uv$，求 $f(1,2)$，$f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$。

3. 设 $f(x,y)=x^2+y^2$，求 $f(\sin(x+y),\mathrm{e}^{xy})$。

4. 求下列各函数的定义域，并画出定义域的图形：

(1) $z=\ln(1-|x|-|y|)$　　　(2) $z=\sqrt{x-y^2}$

(3) $z=\arcsin(x^2+y^2)$　　(4) $z=\sqrt{4x^2+9y^2-36}$

(5) $z=\arccos(x-1)-\sqrt{y}$　　(6) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-y^2}$

(7) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$

*(8) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}(R>r>0)$

5. 求下列函数的极限。

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(e^x+y^2)}{x^2+y}$　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{e^{x+y}}$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\tan(xy)}{y}$　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{2-\sqrt{xy+4}}$

*(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2e^{xy}}$　　*(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{2-e^{xy}}-1}{xy}$

*6. 讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$在原点(0,0)处是否有极限。

6.2　偏导数和全微分

6.2.1　偏导数

1. 偏增量与全增量

设二元函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义，当 $y=y_0$ 保持不变时，$z=f(x,y_0)$可看作一元函数。当自变量 x 在 x_0 处取改变量 Δx 时，相应的函数 z 的改变量 $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$称为二元函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处**关于自变量 x 的偏增量**，记作 $\Delta_x z$，即 $\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$。

同理，可以定义**关于自变量 y 的偏增量** $\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$。

函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的**全增量**，记作 Δz，即

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\tag{6-2-1}$$

2. 偏导数的定义

定义 6-2-1　设二元函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\tag{6-2-2}$$

存在，则称该极限值为函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处**关于自变量 x 的偏导数**，记作 $f'_x(x_0,y_0)$，或$z'_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$。

同理，如果极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} \tag{6-2-3}$$

存在，则称该极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**关于自变量 y 的偏导数**，记作 $f'_y(x_0,y_0)$，或 $z'_y\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$。

如果函数 $z=f(x,y)$ 在平面区域 D 内的每一个点 (x,y) 处对 x（或对 y）的偏导数都存在，那么这个偏导数就是变量 x,y 的函数，称它为函数 $f(x,y)$ 对 x（或对 y）的**偏导函数**，简称**偏导数**，记作 $f'_x(x,y)$ 或 z'_x，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$$\left(f'_y(x,y)\text{ 或 } z'_y,\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$。

3. 偏导数的求法

由偏导数的定义易见，要求多元函数对某个变量的偏导数，只须将其余变量看作常量，按一元函数的求导法则求导。至于求函数在固定点 (x_0,y_0) 处的偏导数，只须先求出偏导函数，再用 (x_0,y_0) 代入即可。

例 6-2-1 设 $f(x,y)=x^2-3xy^2+2y^3$，求 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$，$f'_x(1,2)$，$f'_y(0,1)$。

解 将 y 看作常量，对 x 求导得

$$f'_x(x,y)=2x-3y^2$$

类似地，将 x 看作常量，对 y 求导得

$$f'_y(x,y)=-6xy+6y^2$$

代入点的坐标得

$$f'_x(1,2)=-10,\quad f'_y(0,1)=6$$

例 6-2-2 设 $z=x^y$，求 z'_x，z'_y。

解 将 y 看作常量，对 x 求导得

$$z'_x=yx^{y-1}$$

类似地，将 x 看作常量，对 y 求导得

$$z'_y=x^y\ln x$$

例 6-2-3 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 $\dfrac{\partial r}{\partial x}$，$\dfrac{\partial r}{\partial y}$，$\dfrac{\partial r}{\partial z}$。

解 把 y 和 z 都看作常量，对 x 求导得

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$$

类似地，可得

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

例 6-2-4 已知理想气体的状态方程 $pV=RT$（R 为常量），求证：

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1$$

证明 因为

$$p=\frac{RT}{V}\Rightarrow\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2}$$

$$V=\frac{RT}{p}\Rightarrow\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p}$$

$$T=\frac{pV}{R}\Rightarrow\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R}$$

所以

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{pV}=-1$$

证毕。

注：对一元函数来说，导数符号$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$既可以看作一个整体符号，也可以看作函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 之商(微商名称的由来)。但是通过例 6-2-4，会发现对多元函数来说，偏导数符号$\frac{\partial z}{\partial x}$只能看作是一个整体符号，不能看作分子$\partial z$ 与分母∂x 之商。

4. 偏导数与连续性

如果一元函数在某点具有导数，则它在该点必定连续。但对于多元函数来说，即使各偏导数在某点都存在，也不能保证函数在该点连续。例如：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)处对 x 和 y 的偏导数分别为

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}0=0$$

但由 6.1 节知极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在，故函数 $f(x,y)$在(0,0)处不连续。

5. 高阶偏导数

一般地，二元函数 $z=f(x,y)$的偏导数 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$还是二元函数。如果它们对 x,y 的偏导数仍然存在，则称其为函数 $z=f(x,y)$的二阶偏导数，记作

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yx}(x,y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yy}(x,y)$$

称 $f''_{xy}(x,y)$和 $f''_{yx}(x,y)$为二阶混合偏导数。同样可得三阶、四阶以及 n 阶偏导数，二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**。

例 6-2-5 设 $z=x^3y^2-3xy^3-xy+5$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$。

解 由$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-3y^3-y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-9xy^2-x$，可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(3x^2y^2-3y^3-y)'_x=6xy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(3x^2y^2-3y^3-y)'_y=6x^2y-9y^2-1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=(2x^3y-9xy^2-x)'_x=6x^2y-9y^2-1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(2x^3y-9xy^2-x)'_y=2x^3-18xy$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=(6xy^2)'_x=6y^2$$

例 6-2-6 设 $z=x^2e^y$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。

解 由$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2e^y$，可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(2xe^y)'_x=2e^y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(2xe^y)'_y=2xe^y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=(x^2e^y)'_x=2xe^y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(x^2e^y)'_y=x^2e^y$$

在例 6-2-5 和例 6-2-6 中，两个二阶混合偏导数分别相等，即$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$。这不是偶然的，事实上，有如下定理。

定理 6-2-1 对于二元函数 $z=f(x,y)$，如果二阶混合偏导数 $f''_{xy}(x,y)$和 $f''_{yx}(x,y)$在点(x,y)处均连续，则必有 $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$。换句话说，二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关。

6.2.2 全微分

把一元函数的微分概念推广到多元函数即为全微分。

1. 全微分的概念

定义 6-2-2 若函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)处的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可以表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho) \tag{6-2-4}$$

其中，A，B 与 Δx 和 Δy 无关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0(\Delta x\to 0,\Delta y\to 0)$，$o(\rho)$是 ρ 的高阶无穷小量，则称二元函数 $z=f(x,y)$ **在点(x,y)处可微分**，并称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $f(x,y)$在点(x,y)处的全微分，记作 dz 或 $df(x,y)$，即

$$dz=A\Delta x+B\Delta y \tag{6-2-5}$$

如果函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内每一点处都可微分，那么称该函数在 D 内可微分。

多元函数在某点的偏导数存在，并不能保证函数在该点连续。但是由全微分的定义可知，**如果函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)处可微分，则函数在该点必定连续**。事实上，由

式(6-2-4)可得 $\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta z=0$，从而有

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x+\Delta x,y+\Delta y)=\lim_{\rho\to 0}[f(x,y)+\Delta z]=f(x,y)$$

因此，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续。

下面讨论函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微分的条件。

定理 6-2-2(必要条件)　如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，则函数在该点的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y \tag{6-2-6}$$

证明　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，于是有 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$。特别地，当 $\Delta y=0$ 时由式(6-2-4)可得

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\Delta x+o(|\Delta x|)$$

将上式两边各除以 Δx，再令 $\Delta x\to 0$ 而取极限，可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[A+\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}\right]=A$$

因此 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 存在，且 $\frac{\partial z}{\partial x}=A$。同理 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在，且 $\frac{\partial z}{\partial y}=B$。所以，$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$。

证毕。

依照习惯，Δx，Δy 分别记作 dx，dy，并分别称为自变量的微分，则函数 $z=f(x,y)$ 的全微分可写作

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{6-2-7}$$

注：偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 都存在是可微分的必要条件，但不是充分条件。例如，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处虽然有 $f'_x(0,0)=0$ 及 $f'_y(0,0)=0$，但函数在点 $(0,0)$ 处不可微分，即 $\Delta z-[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]$ 不是比 ρ 高阶的无穷小。这是因为当 $(\Delta x,\Delta y)$ 沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 时，

$$\frac{\Delta z-[f'_x(0,0)\cdot\Delta x+f'_y(0,0)\cdot\Delta y]}{\rho}=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\neq 0$$

它不能随 $\rho\to 0$ 而趋于 0。这与一元函数在某点的导数存在是其在该点可微分的充要条件有根本的区别。但是如果各个偏导数还连续，则可得可微分的充分条件。

定理 6-2-3(充分条件)　如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 处连续，则函数在该点可微分。

证明　略。

定理 6-2-2 和定理 6-2-3 的结论可推广到三元及三元以上函数。

二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和，称为二元函数的微分符合**叠加原理**。叠加原理也适用于二元以上的函数。例如，三元函数 $u=f(x,y,z)$ 的全微分为

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz \tag{6-2-8}$$

例 6-2-7 计算函数 $z=e^{xy}$ 在点(2,1)处的全微分。

解 因为 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=ye^{xy}\Big|_{\substack{x=2\\y=1}}=e^2$， $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=xe^{xy}\Big|_{\substack{x=2\\y=1}}=2e^2$

所以 $dz\Big|_{\substack{x=2\\y=1}}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}dx+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}dy=e^2dx+2e^2dy$

例 6-2-8 已知函数 $z=e^x\cos(x+y)$，求其全微分。

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\cos(x+y)-e^x\sin(x+y)$， $\frac{\partial z}{\partial y}=-e^x\sin(x+y)$

所以 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=[e^x\cos(x+y)-e^x\sin(x+y)]dx-e^x\sin(x+y)dy$

例 6-2-9 已知函数 $u=x^2y+\sin\frac{y}{2}+\arctan 2z$，求其全微分。

解 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=2xy$， $\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}$， $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2}{1+4z^2}$

所以 $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=2xydx+\left(x^2+\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}\right)dy+\frac{2}{1+4z^2}dz$

*2. 全微分在近似计算中的应用

由全微分的定义知：$\Delta z=dz+o(\rho)$。当 $|\Delta x|$ 和 $|\Delta y|$ 都很小时，有全微分近似计算的公式：

$$\Delta z\approx dz$$

于是得全微分近似计算的公式：

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y \tag{6-2-9}$$

例 6-2-10 计算 $(1.04)^{2.02}$ 的近似值。

解 设函数 $f(x,y)=x^y$，则要计算的值就是函数在 $x=1.04$，$y=2.02$ 时的函数值 $f(1.04,2.02)$。取 $x_0=1$，$y_0=2$，$\Delta x=0.04$，$\Delta y=0.02$，由于

$$f(1,2)=1,\quad f'_x(1,2)=yx^{y-1}\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=2,\quad f'_y(1,2)=x^y\ln x\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=0$$

所以，应用公式(6-2-9)可得

$$\begin{aligned}(1.04)^{2.02}&\approx f(1,2)+f'_x(1,2)\Delta x+f'_y(1,2)\Delta y\\&=1+2\times0.04+0\times0.02\\&=1.08\end{aligned}$$

例 6-2-11 现有一块长方形的钢板，其长为 2m，宽为 1.5m，今对其进行加工，使其长度增加了 8cm，而其宽度减少了 10cm。试问改变的面积大约为多少？是增加还是减少？

解 长方形面积 $S=xy$ 为长 x 和宽 y 的二元函数，其全微分为 $dS=y\Delta x+x\Delta y$。取

$x_0=2, y_0=1.5, \Delta x=0.08, \Delta y=-0.1$ 代入上式，得

$$dS=1.5\times 0.08+2\times(-0.1)=-0.08$$

因为 $\Delta S\approx dS=-0.08$，故该钢板的面积缩小了近 0.08m^2。

习题 6-2

1. 求下列函数的偏导数。

(1) $z=x^2y+xy^3$　　(2) $z=e^{xy}+y^2$

(3) $z=\dfrac{y^2}{x}+\ln 5$　　(4) $z=\ln\dfrac{y}{x}$

(5) $z=\sqrt{x^2+y^2}$　　(6) $z=e^x\sin(y^2)$

(7) $z=xe^x\tan y$　　*(8) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$

*(9) $u=x^{\frac{y}{z}}$　　*(10) $u=\arctan(x-y)^z$

2. 求下列函数的二阶偏导数。

(1) $z=2x+4x^2y^3-y^5$　　(2) $z=x\ln(x+y)$

(3) $z=e^{xy}$　　(4) $z=\sin(x^2+y^2)$

3. 设 $z=x^3e^y$，求$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$，$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$，$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$，$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$，$\left.\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$。

4. 求下列函数的全微分。

(1) $z=x^2y-\sin(xy)$　　(2) $z=e^x\ln y$

(3) $z=e^{xy}$　　(4) $z=\ln(3x^2-2y)$

(5) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$　　(6) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$

*(7) $u=y^{xz}$

5. 求当 $x=10, y=5, \Delta x=0.2, \Delta y=0.1$ 时函数 $z=3x^2+2y^3$ 的全微分。

*6. 计算$(1.97)^{1.05}$的近似值($\ln 2=0.693$)。

*7. 设有圆柱体，它经过变形后，底面半径由 2cm 增加到 2.05cm，高由 10cm 减少到 9.8cm，求这个圆柱体体积的近似值。

6.3　多元复合函数与隐函数的微分法

6.3.1　复合函数的微分法

一元复合函数的求导法则在求导法中起着重要作用，对于多元函数来说，情况也是如此。下面先讨论二元函数的复合函数。

1. 二元复合函数的概念

如果 z 是变量 u 和 v 的函数 $z=f(u,v)$，而 u 和 v 又是 x 和 y 的函数，$u=\varphi(x,y)$，

$v=\psi(x,y)$，则称函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 为 x,y 的复合函数。其中 u 和 v 称为中间变量。

为了更清楚地表示这些变量之间的关系，可用图表示。上述复合函数中变量间的关系可用图 6-3-1 表示，其中线段表示所连的两个变量有关系。

二元复合函数有两种特殊情形。

(1) 若 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x)$，$v=\psi(x)$，则复合函数 $z=f[\varphi(x),\psi(x)]$ 为一元函数，其复合关系如图 6-3-2 所示，称这种复合函数的导数为全导数。

(2) 若 $z=f(u)$，$u=\varphi(x,y)$，则复合函数为 $z=f[\varphi(x,y)]$，其复合关系如图 6-3-3 所示。

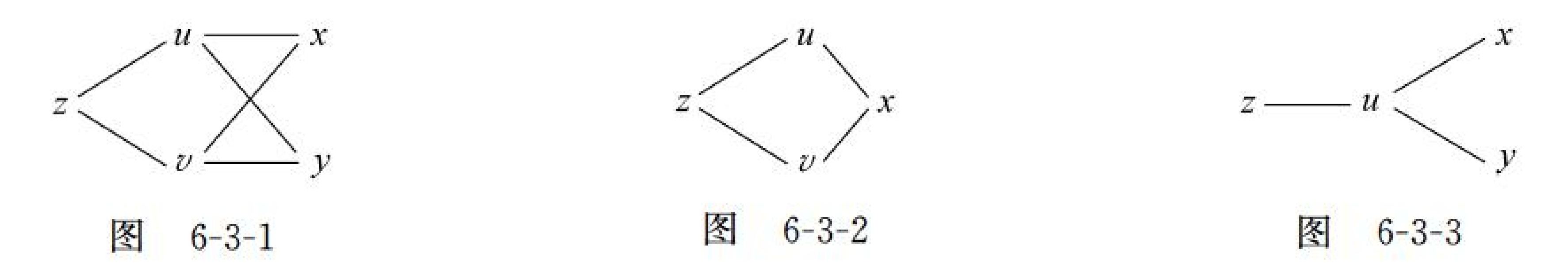


图 6-3-1　　图 6-3-2　　图 6-3-3

2. 复合函数的微分法

定理 6-3-1　若函数 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 处的偏导数均存在，函数 $z=f(u,v)$ 在相应的点 (u,v) 处可微，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 处的偏导数必存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \tag{6-3-1}$$

上述公式称为**复合函数的链式法则**，该法则可比照复合关系图 6-3-1 来记忆。

例 6-3-1　设 $z=\mathrm{e}^u\sin v$，而 $u=xy$，$v=x+y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^u\sin v\cdot y+\mathrm{e}^u\cos v\cdot 1=\mathrm{e}^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)]$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^u\sin v\cdot x+\mathrm{e}^u\cos v\cdot 1=\mathrm{e}^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)]$

尽管多元复合函数的复合关系是多种多样的，相应的公式也很多，不可能也没必要把所有公式都写出来，只须把握住函数间的复合关系及函数对某个自变量求偏导时，应通过一切有关的中间变量用复合函数微分法求微分到该自变量这一原则。可以参照公式(6-3-1)写出前面介绍的二元复合函数两种特殊情形的相应公式。

例 6-3-2　设 $z=f(x,y)$，而 $y=\varphi(x)$，求导数 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$。

解　所给函数的复合关系如图 6-3-4 所示，则所求全导数为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

z
x
y — x

图 6-3-4

注：在上式中，左边$\frac{dz}{dx}$表示把复合函数$z=f[x,\varphi(x)]$对变量x求导数(此时$z=f[x,\varphi(x)]$为关于变量x的一元函数)，右边$\frac{\partial z}{\partial x}$表示把二元函数$z=f(x,y)$对变量$x$求偏导数，请注意区别。

例 6-3-3 设$z=u^3\ln v$，而$u=e^x$，$v=\cos x$，求全导数$\frac{dz}{dx}$。

解 $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}=3u^2\ln v\cdot e^x+\frac{u^3}{v}\cdot(-\sin x)=e^{3x}[3\ln\cos x-\tan x]$

例 6-3-4 设$z=f(x^2-y^2,xy)$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

解 设$u=x^2-y^2$，$v=xy$，则$z=f(u,v)$是以u和v为中间变量的二元复合函数，其复合关系如图 6-3-1 所示，于是由公式(6-3-1)得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2xf'_u+yf'_v$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-2yf'_u+xf'_v$$

注：为表达简便起见，一般采用记号$f'_1(u,v)=f'_u(u,v)$，$f'_2(u,v)=f'_v(u,v)$，下标1表示对第一个变量求偏导数，下标2表示对第二个变量求偏导数。对于高阶偏导数也有这种简便记号，如$f''_{21}(u,v)=f''_{vu}(x,y)$等。以后遇到含抽象函数的多元复合函数求偏导数时，常常采用这种记号，而不必写出中间变量。

6.3.2 隐函数的微分法

1. 隐函数的概念

方程$F(x,y)=0$确定了y是x的函数$y=f(x)$，称其为**一元隐函数**；方程$F(x,y,z)=0$确定了z是x和y的二元函数$z=f(x,y)$，称其为**二元隐函数**。类似地，还有三元、四元一直到n元的隐函数的概念。本书仅讨论一元和二元隐函数。

2. 隐函数的微分法

本书2.2节曾介绍过利用一元复合函数求导法则讨论一元隐函数的导数。下面利用偏导数给出求其导数的公式。

将方程$F(x,y)=0$的两边同时对x求导数，且把变量y看成变量x的函数，得

$$F'_x+F'_y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

当$F'_y\neq0$时，解得一元隐函数的求导公式如下：

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}\tag{6-3-2}$$

例 6-3-5 求由方程$x^2e^y+y^3=x$所确定的隐函数$y=f(x)$的导数。

解 令$F(x,y)=x^2e^y+y^3-x$，则

$$F'_x = 2xe^y - 1, \quad F'_y = x^2e^y + 3y^2$$

因此，由公式(6-3-2)得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2xe^y - 1}{x^2e^y + 3y^2} = \frac{1 - 2xe^y}{x^2e^y + 3y^2}$$

当然，本题还可以利用一元复合函数求导法则来求一元隐函数的导数，请回顾一下并写出解题过程。

对于由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$，将方程 $F(x,y,z)=0$ 两边分别对 x 和对 y 求偏导数，且将变量 z 看作 x 和 y 的函数，得

$$F'_x + F'_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad F'_y + F'_z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

当 $F'_z \neq 0$ 时，解得二元隐函数求偏导公式如下：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} \tag{6-3-3}$$

例 6-3-6 求由方程 $e^z - xyz = 1$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数。

解 令 $F(x,y,z) = e^z - xyz - 1$，则

$$F'_x = -yz, \quad F'_x = -xz, \quad F'_z = e^z - xy$$

因此，由公式(6-3-3)得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-yz}{e^z - xy} = \frac{yz}{e^z - xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-xz}{e^z - xy} = \frac{xz}{e^z - xy}$$

* **例 6-3-7** 求由方程 $z^x = y^z$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 dz。

解 令 $F(x,y,x) = z^x - y^z$，则

$$F'_x = z^x \ln z, \quad F'_y = -zy^{z-1}, \quad F'_z = xz^{x-1} - y^z \ln y$$

由公式(6-3-3)得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{z^x \ln z}{xz^{x-1} - y^z \ln y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-zy^{z-1}}{xz^{x-1} - y^z \ln y} = \frac{zy^{z-1}}{xz^{x-1} - y^z \ln y}$$

因此，

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{-z^x \ln z}{xz^{x-1} - y^z \ln y}dx + \frac{zy^{z-1}}{xz^{x-1} - y^z \ln y}dy$$

习题 6-3

1. 求下列函数的全导数。

(1) $z=\ln(u+v)$，$u=\sin x$，$v=x^2$，求$\dfrac{dz}{dx}$。

(2) $z=e^{uv}$，$u=\tan x$，$v=\dfrac{1}{x}$，求$\dfrac{dz}{dx}$。

2. 求下列复合函数的偏导数。

(1) $z=u^2\ln v, u=x^2+y, v=x+y^2$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

(2) $z=u^2-v^2, u=\sin(xy), v=\cos(xy)$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

(3) $z=\arctan\frac{u}{v}, u=x+y, v=x-y$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

(4) $z=f(xy,y^2)$，其中 f 具有一阶连续偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

*(5) $u=f(x,xy,xyz)$，其中 f 具有一阶连续偏导数，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$。

3. 求下列方程所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

(1) $xy+\ln x+\ln y=0$　　(2) $x^2+y^2=2x$

(3) $\sin y+\mathrm{e}^x-xy^2=0$　　(4) $y=1+x\mathrm{e}^y$

4. 求下列方程所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

(1) $z^3-xyz=1$　　(2) $x^2+y^2+z^2=2x$

(3) $\mathrm{e}^z=\sin x\sin y$　　(4) $z^2y-xz=2$

(5) $x^3+y^3+z^3=3xyz+4$　　(6) $yz=x+\mathrm{e}^z$

(7) $2xz+\ln(xyz)=0$　　(8) $\sin(x-2y+3z)=x-2y+3z$

6.4 偏导数的应用

本书第 2 章介绍了关于一元函数的导数在几何、工程技术及经济管理等领域的一些应用，类似地，本节主要讨论多元函数的偏导数的若干应用。

6.4.1 几何应用

1. 空间曲线的切线与法平面

由一元函数导数的几何意义可求平面曲线 $y=f(x)$ 的切线和法线方程。与平面曲线的切线概念相类似，先给出空间曲线的切线和法平面的概念。

定义 6-4-1 设 M_0 是空间曲线 Γ 上的一点，M 是 Γ 上与 M_0 邻近的点。如果割线 M_0M 的极限位置存在，设为 M_0T，则 M_0T 称为曲线 Γ 在点 M_0 的切线，点 M_0 为切点。过点 M_0 且垂直 M_0T 的平面称为曲线 Γ 在点 M_0 的**法平面**，如图 6-4-1 所示。

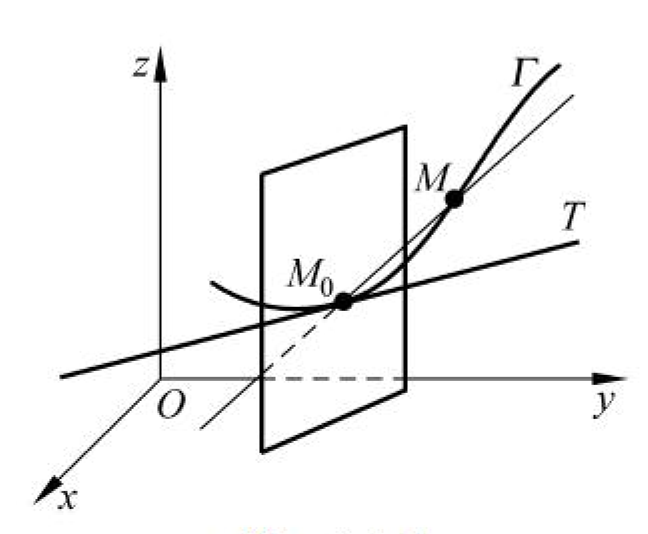


图 6-4-1

下面介绍空间曲线 Γ 的切线与法平面方程。

设空间曲线 Γ 的参数方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t)$$

其中，t 为参数，$\varphi(t)$，$\psi(t)$，$\omega(t)$可导，且导数不全为零。

当参数 t 取 t_0 时，对应曲线上的点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$；当$t=t_0+\Delta t$ 时，对应曲线上的点 $M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$。由解析几何知，割线 M_0M 的方程为

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}$$

或者写作

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}$$

当 $M\to M_0$ 时，有 $\Delta t\to 0$，此时$\frac{\Delta x}{\Delta t}\to\varphi'(t_0)$，$\frac{\Delta y}{\Delta t}\to\psi'(t_0)$，$\frac{\Delta z}{\Delta t}\to\omega'(t_0)$。由于 $\varphi'(t_0)$，$\psi'(t_0)$，$\omega'(t_0)$不全为零，所以曲线 Γ 在点 M_0 处的切线存在且方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}\tag{6-4-1}$$

向量 $\boldsymbol{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$是曲线 Γ 在点 M_0 处的切线的**方向向量**（简称**切向量**）。

切线的方向向量正是法平面的法向量，所以法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0\tag{6-4-2}$$

例 6-4-1 求空间曲线$\begin{cases}y=x^2\\z=2x+1\end{cases}$在点(0,0,1)处的切线和法平面方程。

解 将曲线转换为参数形式：

$$x=t,\quad y=t^2,\quad z=2t+1$$

点(0,0,1)对应于参数 $t_0=0$，此时有

$$x'|_{t=0}=1,\quad y'|_{t=0}=2t|_{t=0}=0,\quad z'|_{t=0}=2$$

所以曲线在点(0,0,1)处的切向量 $\boldsymbol{T}=(1,0,2)$，于是所求切线方程为

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-1}{2}$$

即

$$\begin{cases}x=\dfrac{z-1}{2}\\y=0\end{cases}$$

所求法平面方程为

$$(x-0)+2(z-1)=0$$

即

$$x+2z-2=0$$

2. 曲面的切平面与法线

定义 6-4-2 设 M_0 为曲面 Σ 上的一点，如果在曲面 Σ 上过点 M_0 的任何曲线在点 M_0 处的切线均在同一个平面内，则称该平面为曲面 Σ 在点 M_0 处的**切平面**，过点 M_0 且垂直于切平面的直线，称为曲面 Σ 在点 M_0 的**法线**。

设曲面 Σ 的方程为 $F(x,y,z)=0$，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 Σ 上的一点，如果函数 $F(x,y,z)$ 在点 M_0 处可微，且 F'_x,F'_y,F'_z 在点 M_0 处不同时为零，则曲面 Σ 在点 M_0 处有切平面。下面讨论曲面的切平面方程。

在 Σ 上任取一条过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的曲线 Γ，设其方程为 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$z=\omega(t)$。参数 t_0 对应 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，$\varphi'(t_0)$，$\psi'(t_0)$，$\omega'(t_0)$ 都存在且不全为零，曲线 Γ 在 M_0 点的切线方向向量为 $\boldsymbol{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$。

由于曲线 Γ 在曲面 Σ 上，所以有

$$F[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\equiv 0$$

两边对 t 求导后，将 $t=t_0$ 代入，得

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)\varphi'(t_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)\psi'(t_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)\omega'(t_0)=0 \tag{6-4-3}$$

若记 $\boldsymbol{n}=(F'_x(x_0,y_0,z_0),F'_y(x_0,y_0,z_0),F'_z(x_0,y_0,z_0))$，则式(6-4-3)表明曲线 Γ 在点 M_0 处的切向量 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 相互垂直。由于曲线 Γ 是曲面 Σ 上过点 M_0 的任意曲线，所以曲面 Σ 上过点 M_0 的所有曲线在该点处的切线都与向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直，因此 $\boldsymbol{n}$ 就是曲面 Σ 过点 M_0 切平面的一个法向量。于是，切平面方程为

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0 \tag{6-4-4}$$

由于法线是过曲面上点 M_0 且与切平面垂直的直线，所以法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)} \tag{6-4-5}$$

例 6-4-2　求曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 在点 $M(3,1,1)$ 处的切平面方程和法线方程。

解　令 $F(x,y,z)=3x^2+y^2-z^2-27$，则

$$F'_x(3,1,1)=6x\,|_{(3,1,1)}=18$$

$$F'_y(3,1,1)=2y\,|_{(3,1,1)}=2$$

$$F'_z(3,1,1)=-2z\,|_{(3,1,1)}=-2$$

所以曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 在点 $M(3,1,1)$ 处的法向量 $\boldsymbol{n}=(18,2,-2)$，于是所求切平面方程为

$$18(x-3)+2(y-1)-2(z-1)=0$$

即

$$9x+y-z-27=0$$

所求法线方程为

$$\frac{x-3}{18}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-2}$$

即

$$\frac{x-3}{9}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$$

6.4.2　多元函数的极值与最值

在许多实际问题中，往往会遇到多元函数的最值问题，而多元函数的最值与极值有着密切的联系。下面以二元函数为例来讨论多元函数的极值和最值问题。

1. 二元函数的极值

定义 6-4-3　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个 δ 邻域 $U_\delta(x_0,y_0)$ 内有定义，

如果对于任意点$(x,y)\in U_\delta(x_0,y_0)$，当$(x,y)\neq(x_0,y_0)$时恒有$f(x,y)>f(x_0,y_0)$（或$f(x,y)<f(x_0,y_0)$）成立，则称$f(x_0,y_0)$为函数$z=f(x,y)$的极小值（或极大值），点$(x_0,y_0)$称为极小值点（或极大值点）。

极大值与极小值统称为极值，极大值点与极小值点统称为极值点。

例如，函数$z=x^2+y^2$在点$(0,0)$取到了极小值，点$(0,0)$为该函数的极小值点。

在一元函数中，可导函数的极值点在函数的驻点上达到，二元函数也有类似的结果。

定理 6-4-1（极值的必要条件） 如果函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处存在偏导数，且在点(x_0,y_0)取得极值，则必有

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\quad f'_y(x_0,y_0)=0$$

证明 因为$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处有极值，固定$y=y_0$，则$z=f(x,y_0)$在点$x=x_0$处也取得极值，根据一元函数极值存在的必要条件，有

$$f'_x(x_0,y_0)=0$$

同理可得

$$f'_y(x_0,y_0)=0$$

证毕。

类似地，称使$f'_x(x,y)=0$，$f'_y(x,y)=0$的点(x,y)为函数$f(x,y)$的驻点。

定理 6-4-1 仅是取得极值的必要条件，并非充分条件，即**驻点不一定都是极值点**。例如，点$(0,0)$显然为函数$z=x^2-y^2$的驻点，但可以验证该点不是极值点。

注：极值点有可能是驻点，也有可能是偏导数不存在的点。例如，函数$z=-\sqrt{x^2+y^2}$的图形是位于xOy面下方的圆锥面，显然点$(0,0)$为该函数的极大值点，但在点$(0,0)$处的两个偏导数都不存在。

那么，如何进一步判别驻点是否为极值点呢？

定理 6-4-2（极值的充分条件） 设二元函数$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)点的某一邻域内有连续的二阶偏导数，且点(x_0,y_0)为函数$f(x,y)$的驻点。记

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0),\quad B=f''_{xy}(x_0,y_0),\quad C=f''_{yy}(x_0,y_0)$$

则：(1) 如果$AC-B^2>0$，则点(x_0,y_0)是$f(x,y)$的极值点。且当$A>0$时，点(x_0,y_0)为$f(x,y)$的极小值点；当$A<0$时，点(x_0,y_0)为$f(x,y)$的极大值点。

(2) 如果$AC-B^2<0$，则点(x_0,y_0)必不是$f(x,y)$的极值点。

(3) 如果$AC-B^2=0$，则点(x_0,y_0)可能是$f(x,y)$的极值点，也有可能不是极值点，须另行判定。

证明 略。

综上所述，求二元函数极值的一般步骤如下：

(1) 解方程组$\begin{cases}f'_x(x,y)=0\\f'_y(x,y)=0\end{cases}$，求出一切驻点。

(2) 求二阶偏导数f''_{xx}，f''_{xy}，f''_{yy}。

(3) 求出驻点处$A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$的值及$AC-B^2$的符号，根据定理 6-4-2 判断出点(x_0,y_0)是否为极值点，并求出极值。

例 6-4-3　求二元函数 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ 的极值。

解　先解方程组 $\begin{cases} f'_x=3x^2-3y=0 \\ f'_y=3y^2-3x=0 \end{cases}$，得驻点为(0,0)和(1,1)。

再求二阶偏导数：$f''_{xx}(x,y)=6x$，$f''_{xy}(x,y)=-3$，$f''_{yy}(x,y)=6y$。

对于驻点(0,0)，由于 $A=f''_{xx}(0,0)=0$，$B=f''_{xy}(0,0)=-3$，$C=f''_{yy}(0,0)=0$，$AC-B^2=-9<0$，所以点(0,0)不是函数的极值点。

对于驻点(1,1)，由于 $A=f''_{xx}(1,1)=6$，$B=f''_{xy}(1,1)=-3$，$C=f''_{yy}(1,1)=6$，$AC-B^2=27>0$，所以点(1,1)为函数的极小值点，函数极小值为 $f(1,1)=-1$。

2. 二元函数的最大值和最小值

类似于一元函数，对于有界闭区域上连续的二元函数，一定能在该区域上取得最大值和最小值。对于二元可微函数，如果该函数的最大值(或最小值)在区域内部取得，这个最大值点(或最小值点)必在函数的驻点之中；若函数的最大值(或最小值)在区域边界上取得，那么它一定也是函数在边界上的最大值(或最小值)。因此求函数的最大值(或最小值)的方法是：将函数在所讨论区域内所有驻点处的函数值与函数在区域边界上的最大值(或最小值)相比较，其中最大者(或最小者)就是函数在闭区域上的最大值(或最小值)。对于实际问题中的最值问题，往往从问题本身能断定的最大值(或最小值)一定存在，且在定义区域的内部取得，这时，如果函数在定义区域内有唯一的驻点，则该驻点的函数值就是函数的最大值(或最小值)。

例 6-4-4　某厂要用铁板做一个体积为 2m^3 的有盖长方体水箱，问长、宽、高各取多少，才能使用料最省？

解　设水箱的长和宽分别为 xm 和 ym，则其高为$\dfrac{2}{xy}$m，该水箱所用材料的面积为

$$A=2\left(xy+x\cdot\frac{2}{xy}+y\cdot\frac{2}{xy}\right)=2\left(xy+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right)\quad(x>0,y>0)$$

由此，我们求出面积函数 $A=A(x,y)$ 的最小值点即可。令

$$\begin{cases} A'_x=2\left(y-\dfrac{2}{x^2}\right)=0 \\ A'_y=2\left(x-\dfrac{2}{y^2}\right)=0 \end{cases}$$

即可解得 $x=\sqrt[3]{2}$，$y=\sqrt[3]{2}$。

根据题意，水箱所用材料面积的最小值一定存在，并在区域 $D=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$ 内部取得；又因为函数在 D 内只有唯一的驻点$(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2})$，因此可以断定当 $x=\sqrt[3]{2}$，$y=\sqrt[3]{2}$ 时，A 最小。此时高为$\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{2}$m，也就是说当水箱的长、宽、高均为$\sqrt[3]{2}$m 时，水箱所用材料最省。

从这个例子还可以看出：体积一定的长方体中，正方体表面积最小。

*3. 条件极值

上面所讨论的极值问题中，自变量在定义域内可以任意取值，未受任何限制，通常称

为**无条件极值**。但在实际问题中，求函数 $z=f(x,y)$ 的极值时，有时其自变量 x,y 会受到另一个方程 $\varphi(x,y)=0$ 的制约，称这样的极值为**条件极值**，方程 $\varphi(x,y)=0$ 为**约束条件**，$z=f(x,y)$ 为**目标函数**。

在条件极值中，有时可以从约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 中解出变量 y（或变量 x），代入目标函数中，从而将条件极值问题转化为无条件极值问题，这种方法称为**化无条件极值法**。但条件极值往往很难转化为无条件极值。因此下面介绍一种直接求条件极值的方法——拉格朗日乘数法。

利用拉格朗日乘数法求函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值的步骤如下。

(1) 构造辅助函数（称为拉格朗日函数）：

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y) \tag{6-4-6}$$

其中，λ 为待定常数，称为拉格朗日乘数。

(2) 求出可能的极值点，即解方程组

$$\begin{cases} F'_x=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0 \\ F'_y=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0 \\ F'_\lambda=\varphi(x,y)=0 \end{cases} \tag{6-4-7}$$

得到可能的极值点 (x_0,y_0) 和乘数 λ。

(3) 判断 (x_0,y_0) 是否为极值点（一般根据实际问题的背景判断即可）。

例 6-4-5 某工厂生产两种商品的日产量分别为 x 和 y（单位：件），总成本函数为 $C(x,y)=8x^2-xy+12y^2$（元），商品的限额为 $x+y=42$，求最小成本。

解 约束条件为 $\varphi(x,y)=x+y-42=0$，设拉格朗日函数为

$$F(x,y,\lambda)=8x^2-xy+12y^2+\lambda(x+y-42)$$

解方程组

$$\begin{cases} F'_x=16x-y+\lambda=0 \\ F'_y=-x+24y+\lambda=0 \\ F'_\lambda=x+y-42=0 \end{cases}$$

可得 $x=25,y=17$，由实际问题可知，唯一驻点 $(25,17)$ 也是最小值点，故最小成本为

$$C(25,17)=8\times25^2-25\times17+12\times17^2=8043(\text{元})$$

故该厂生产这两种商品产量分别为 25 件和 17 件时，成本最小，最小成本为 8043 元。

注：条件极值的解法，一般采用拉格朗日乘数法求解。但要注意到利用乘数法所得到的点只是可能为极值点，究竟这些点是否为极值点以及是极大值点还是极小值点还须进一步判断。在实际问题中往往可以根据问题本身的性质来判定。

*6.4.3 偏导数在经济管理中的应用——偏边际与偏弹性

与一元经济函数的边际分析和弹性分析相类似，可建立多元函数的边际分析和弹性分析，称为偏边际和偏弹性，它们在经济管理领域有着广泛的应用，下面仅就边际分析进行讨论。

1. 边际产量

设某企业生产某种产品的产量 Q 与投入的劳动力 L 和资本 K 的生产函数为 $Q=Q(L,K)$，则称产量 $Q(L,K)$ 对劳动力 L 的偏导数 $Q_L'(L,K)$ 为 $Q(L,K)$ **对劳动力 L 的边际产量**。其经济学意义是：$Q_L'(L,K)$ 近似等于在投入劳动力 L 和资本 K 的基础上，再多投入一个单位的劳动力所增加的产量。同理，$Q_K'(L,K)$ 称为 $Q(L,K)$ **对资本 K 的边际产量**。其经济学意义是：$Q_K'(L,K)$ 近似等于在投入劳动力 L 和资本 K 的基础上，再多投入一个单位的资本所增加的产量。

边际产量通常在相当大的范围内是正的，即在一个因素投入保持不变的情况下，产量随着另一个因素投入的增加而增加，然而增加的速率通常是递减的，直至到达产量不再增加的点为止。

例 6-4-6　设某产品的生产函数为 $Q=4L^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}}$，求 Q 对 L 和 K 的边际产量。

解　产量 Q 对劳动力 L 的边际产量为 $Q_L'(L,K)=3L^{-\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}}$；产量 Q 对资本 K 的边际产量为 $Q_K'(L,K)=L^{\frac{3}{4}}K^{-\frac{3}{4}}$。

容易看出：$Q_L'(L,K)$ 总是正的，但随着 L 的增加而减少；$Q_K'(L,K)$ 也总是正的，也随着 K 的增加而减少。

2. 边际成本

设某企业生产 A，B 两种产品，产量分别为 x，y 时的总成本函数为 $C=C(x,y)$，则 $C_x'(x,y)$ 表示**总成本 $C(x,y)$ 对产量 x 的边际成本**。其经济学意义是：$C_x'(x,y)$ 近似等于在两种产品产量为 (x,y) 的基础上，再多生产一个单位的 A 产品所需增加的成本。$C_y'(x,y)$ 表示总成本 $C(x,y)$ 对产量 y 的边际成本，其经济学意义是：$C_y'(x,y)$ 近似等于在两种产品产量为 (x,y) 的基础上，再多生产一个单位的 B 产品所需增加的成本。

例 6-4-7　设产量分别为 x 和 y 的 A，B 两种产品的总成本为

$$C(x,y)=500+\frac{1}{2}x^2+4xy+\frac{3}{2}y^2$$

(1) 求总成本 C 对产量 x 和 y 的边际成本；

(2) 求当 $x=100$，$y=100$ 时的边际成本，并解释它们的经济含义。

解　(1) 总成本 C 对产量 x 的边际成本为 $C_x'(x,y)=x+4y$；总成本 C 对产量 y 的边际成本为 $C_y'(x,y)=4x+3y$。

(2) 当 $x=100$，$y=100$ 时，总成本 C 对产量 x 的边际成本为

$$C_x'(100,100)=100+4\times100=500$$

这表明，当两种产品都为 100 单位时，再多生产一个单位的 A 产品，总成本将增加约 500 个单位。

当 $x=100$，$y=100$ 时，总成本 C 对产量 y 的边际成本为

$$C_y'(100,100)=4\times100+3\times100=700$$

这表明，当两种产品都为 100 单位时，再多生产一个单位的 B 产品，总成本将增加约 700 个单位。

3. 边际需求

设 A,B 两种产品彼此相关,A 与 B 的需求量 q_1 和 q_2 分别是两种商品的价格 p_1 和 p_2 的函数,即 $q_1=q_1(p_1,p_2)$,$q_2=q_2(p_1,p_2)$,则:

(1) $\frac{\partial q_1}{\partial p_1}$是 A 商品需求量 q_1 关于自身价格 p_1 的边际需求,它表示 A 商品的价格 p_1 发生变化时,A 商品需求量 q_1 的变化率;

(2) $\frac{\partial q_1}{\partial p_2}$是 A 商品需求量 q_1 关于相关商品 B 的价格 p_2 的边际需求,它表示 B 商品的价格 p_2 发生变化时,A 商品需求量 q_1 的变化率;

类似地,$\frac{\partial q_2}{\partial p_1}$是需求量 q_2 关于相关价格 p_1 的边际需求,$\frac{\partial q_2}{\partial p_2}$是需求量 q_2 关于自身价格 p_2 的边际需求。

对于一般的需求函数,若自身价格下降,需求将增加,从而有$\frac{\partial q_1}{\partial p_1}<0$,$\frac{\partial q_2}{\partial p_2}<0$。

如果$\frac{\partial q_1}{\partial p_2}<0$ 且$\frac{\partial q_2}{\partial p_1}<0$,说明两种商品中任意一种价格下降,都将使需求量 q_1 和q_2 同时增加,这时两种商品称为**互补商品**,如汽车和汽油就是互补商品;如果$\frac{\partial q_1}{\partial p_2}>0$ 且$\frac{\partial q_2}{\partial p_1}>0$,说明两种商品中任意一种价格下降,将使其中一个需求量增加,另一个需求量减少,这时两种商品称为**替代商品**,如苹果和香蕉就是替代商品。

例 6-4-8 设 A,B 两种商品彼此相关,它们的需求函数分别为

$$q_1=\frac{50\sqrt[3]{p_2}}{\sqrt{p_1}},\quad q_2=\frac{75p_1}{\sqrt[3]{p_2^2}}$$

试确定两种商品的关系。

解

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1}=-25p_1^{-\frac{3}{2}}p_2^{\frac{1}{3}},\quad \frac{\partial q_1}{\partial p_2}=\frac{50}{3}p_1^{-\frac{1}{2}}p_2^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_1}=75p_2^{-\frac{2}{3}},\qquad \frac{\partial q_2}{\partial p_2}=-50p_1p_2^{-\frac{5}{3}}$$

因为 $p_1>0$,$p_2>0$,所以

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2}>0,\quad \frac{\partial q_2}{\partial p_1}>0$$

这表明 A,B 两种商品是替代商品。

习题 6-4

1. 求曲线 $x=t$,$y=t^2$,$z=t^3$ 在点$(-1,1,-1)$处的切线及法平面方程。
2. 求曲线 $x=\frac{1}{1+t}$,$y=2t^2$,$z=\frac{1+t}{t}$在 $t=1$ 处的切线及法平面方程。
3. 求曲面 $z=x^2+y^2$ 在点$(1,2,5)$处的切平面与法线方程。
4. 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点$(2,1,0)$处的切平面与法线方程。
5. 求曲面 $x^3+y^3+z^3+xyz=6$ 在点$(1,2,-1)$处的切平面与法线方程。

6. 求下列函数的极值。

(1) $f(x,y)=2xy-3x^2-2y^2$　　(2) $f(x,y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$

(3) $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$　　(4) $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$

7. 要做一个容积为 4m^3 的无盖长方体箱子，问长、宽、高各为多少时，才能使所用材料最省？

*8. 从斜边长为 l 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形。

*9. 设某产品的产量 Q 是劳动力 L 和资本 K 的函数为 $Q=60L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{3}{4}}$，求当 $L=128$，$K=8$ 时，劳动力的边际产量和资本的边际产量。

第7章

多元函数积分学

在一元函数积分学中，我们知道定积分是某种确定形式的和的极限。这种和的极限的概念推广到定义在平面区域、空间区域、曲线和曲面上的多元函数的情形，便得到二重积分、三重积分、曲线积分和曲面积分。本章介绍重积分（二重积分和三重积分）、曲线积分（对弧长的曲线积分和对坐标的曲线积分）的概念、计算方法及它们的一些应用（格林公式）。

7.1 二重积分的概念与性质

7.1.1 二重积分的概念

1. 曲顶柱体的体积

设有一立体，它的底是 xOy 面上的闭区域 D，它的侧面是以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面，它的顶是曲面 $z=f(x,y)$，这里 $f(x,y)\geqslant 0$ 且在 D 上连续。这种立体称为**曲顶柱体**，如图 7-1-1 所示。下面讨论如何计算曲顶柱体的体积 V。

仿照求曲边梯形面积的方法，可将求曲顶柱体体积的过程分为 4 个步骤。

1）分割

用一组曲线网将区域 D 分割成 n 个小区域：

$$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$$

同时也用 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示第 i 个小区域的面积。然后分别以这些小闭区域的边界曲线为准线，作母线平行于 z 轴的柱面，将曲顶柱体分割成 n 个小曲顶柱体，小曲顶柱体的体积分别记为 $\Delta V_1,\Delta V_2,\cdots,\Delta V_n$。

2）近似

由于小曲顶柱体的底面很小，所以小的曲顶面起伏变化不会很大，因而可以近似地将小曲顶柱体看作小平顶柱体，即用小平顶柱体的体积来近似代替小曲顶柱体的体积。在每个小区域 $\Delta\sigma_i$ 内任取一点 (ξ_i,η_i)，以 $f(\xi_i,\eta_i)$ 为高且底为 $\Delta\sigma_i$ 的小平顶柱体（见图 7-1-2）

的体积为 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 则有

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

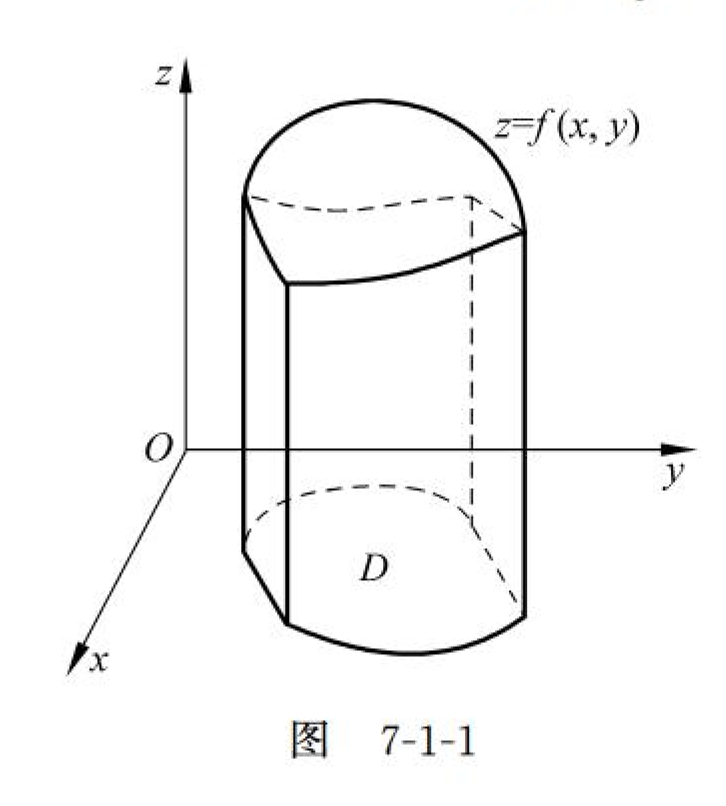


图　7-1-1

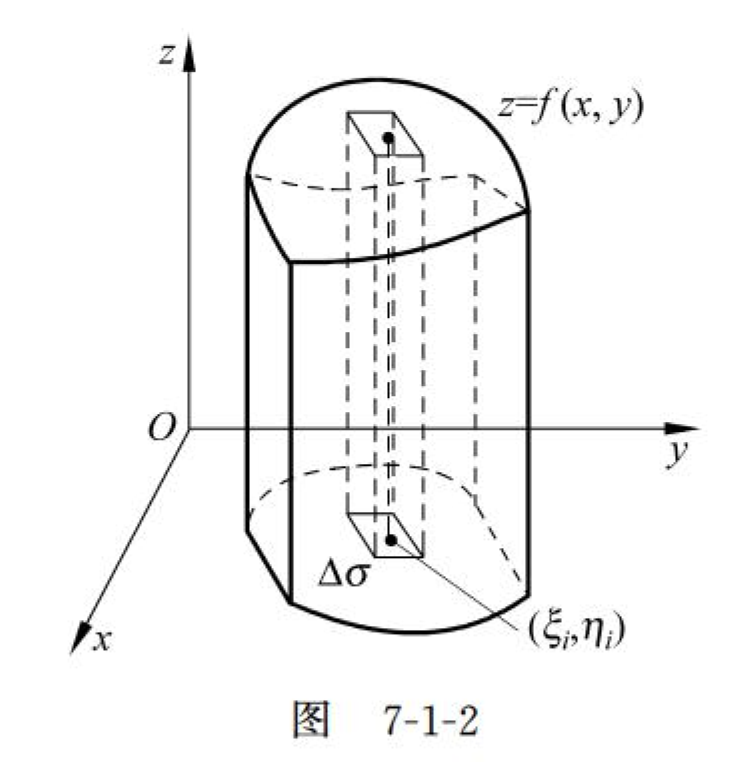


图　7-1-2

3）求和

这 n 个小平顶柱体的体积之和就是曲顶柱体体积的一个近似值，即

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

4）取极限

区域 D 分割得越细，其近似程度就越高。记区域 $\Delta\sigma_i$ 内任意两点距离的最大值（称为该区域的直径）为 $d_i(i=1,2,\cdots,n)$。令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}\to 0$，便得到曲顶柱体的体积：

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

2．平面薄片的质量

设有一平面薄片占有 xOy 面上的闭区域 D，它在点 (x,y) 处的面密度为 $\rho(x,y)$，这里 $\rho(x,y)>0$ 且在 D 上连续，现在要计算该薄片的质量 m。上面用来处理曲顶柱体体积问题的方法完全适用于本处。

首先用一组曲线网把 D 分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$，同时也用 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示第 i 个小区域的面积。

其次把各小块的质量近似地看作均匀薄片的质量：在每个小区域 $\Delta\sigma_i$ 内任取一点 (ξ_i,η_i)，以点 (ξ_i,η_i) 处的面密度 $\rho(\xi_i,\eta_i)$ 近似代替第 i 个小块的面密度，则第 i 个小块（图 7-1-3）的质量的近似值为

$$\Delta m_i \approx \rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

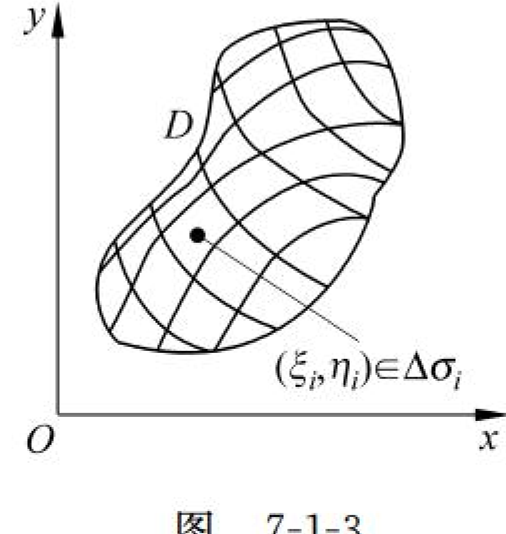


图　7-1-3

再次把各小块质量的和作为平面薄片质量的近似值，即

$$m \approx \sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

最后将分割无限加细，取极限，得到平面薄片的质量：

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

其中,λ 是各个小区域的直径中的最大值。

3. 二重积分的定义

上面两个问题的实际意义虽然不同,但所求量都归结为同一种形式的和的极限,而且解决问题的方法也一样。在自然科学和人文社会科学等领域中,有许多量都可以归结为这一形式的和的极限,因此要研究这种和的极限,并抽象出下述二重积分的定义。

定义 7-1-1 设 $f(x,y)$是有界闭区域 D 上的有界函数,将区域 D 任意分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$,同时 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$表示第 i 个小区域的面积。在每个小区域 $\Delta\sigma_i$ 中任取一点(ξ_i,η_i),作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$,并求和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 。

如果当各个小区域直径的最大值 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}\to 0$ 时,和的极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在,且此极限值与区域 D 的分割法及点(ξ_i,η_i)的取法无关,则称二元函数 $f(x,y)$在区域 D 上可积,此时称该极限值为函数 $f(x,y)$在区域 D 上的二重积分,记作 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \tag{7-1-1}$$

其中,$\iint$ 称为二重积分号,$f(x,y)$称为被积函数,$f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 称为积分表达式,$\mathrm{d}\sigma$ 称为面积元素,x 和 y 称为积分变量,D 称为积分区域,$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 称为积分和。

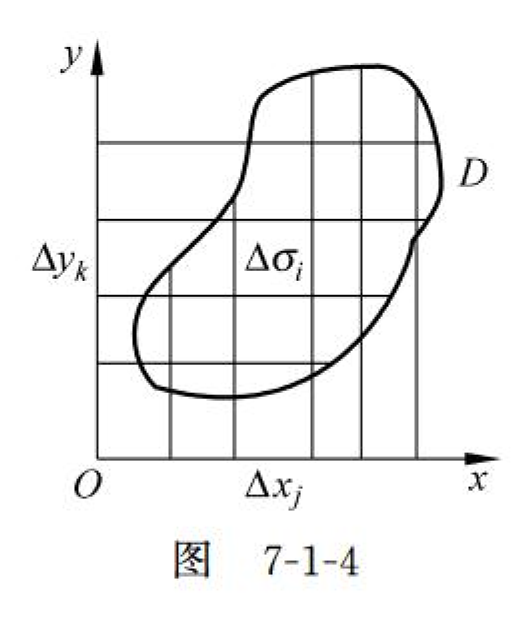


图 7-1-4

在二重积分的定义中,由于可以对区域 D 进行任意分割,所以在直角坐标系中不妨用平行于 x 轴和 y 轴的一组直线网将区域 D 进行分割,这样除了包含边界点的一些小闭区域外,其余的小闭区域都是矩形闭区域(图 7-1-4)。设矩形闭区域 $\Delta\sigma_i$ 的边长为 Δx_j 和 Δy_k,则 $\Delta\sigma_i=\Delta x_j\cdot\Delta y_k$,于是在直角坐标系下,有时把面积元素 $\mathrm{d}\sigma$ 记作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,而把二重积分记作 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 称为直角坐标系中的面积元素。

由二重积分的定义知,前面讨论的曲顶柱体的体积是函数 $f(x,y)$在底 D 上的二重积分:

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

平面薄片的质量是它的面密度 $\rho(x,y)$在薄片所占闭区域 D 上的二重积分:

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

容易看出，二重积分是一个常数，它是定积分概念的推广。

4．二重积分的存在性

如果二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 必存在，即 $f(x,y)$ 在 D 上必可积。以后没有特别声明的情况下，总假定函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，从而 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分都是存在的。

5．二重积分的几何意义

一般地，如果 $f(x,y)\geqslant 0$，被积函数 $f(x,y)$ 可解释为曲顶柱体的顶在点 (x,y) 处的纵坐标，所以二重积分的几何意义就是曲顶柱体的体积。如果 $f(x,y)$ 是负的，柱体就在 xOy 面的下方，二重积分的绝对值仍等于柱体的体积，但二重积分的值是负的。如果 $f(x,y)$ 在 D 的若干部分区域上是正的，而在其他部分区域上是负的，那么 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分就等于 xOy 面上方的柱体体积减去 xOy 面下方的柱体体积所得之差，即二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 在几何上表示**曲顶柱体体积的代数和**。

7.1.2　二重积分的性质

对比二重积分与定积分的定义可知，二重积分有许多类似于定积分的性质。

性质 7-1-1　常数因子可以提到二重积分号的前面，即

$$\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

性质 7-1-2　代数和的二重积分等于二重积分的代数和，即

$$\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

性质 7-1-1 和性质 7-1-2 通常合起来称为**线性性质**。

性质 7-1-3(积分区域可加性)　若闭区域 D 被有限条曲线分为有限个部分区域，则在 D 上的二重积分等于在各部分区域上的二重积分的和。例如，D 分为两个闭区域 D_1 与 D_2，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

性质 7-1-4　若在区域 D 上恒有 $f(x,y)\equiv 1$，σ 为区域 D 的面积，则

$$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = \sigma$$

这个性质的几何意义是很明显的，因为高为 1 的平顶柱体的体积在数值上就等于柱体的底面积。

性质 7-1-5(保序性)　若在区域 D 上恒有 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$ 成立，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

特别地，有

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$$

性质 7-1-6（估值不等式） 若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上有最大值 M 和最小值 m，σ 为区域 D 的面积，则有

$$m\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant M\sigma$$

证明 因为 $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$，所以由性质 7-1-5 可得

$$\iint_D m\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D M\mathrm{d}\sigma$$

再由性质 7-1-1 和性质 7-1-4 便得此估值不等式。证毕。

性质 7-1-7（二重积分的中值定理） 若二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，σ 为区域 D 的面积，则在区域 D 内至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma$$

证明 显然 $\sigma>0$，把性质 7-1-6 中的不等式各端同时除以 σ 可得

$$m \leqslant \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant M$$

这就是说，确定的数值 $\frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 介于 m 与 M 之间。根据有界闭区域上连续的多元函数的介值定理可知，在区域 D 内至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

将上式两端同时乘以 σ，便得到所要证明的式子。证毕。

习题 7-1

1. 利用二重积分的几何意义，计算下列二重积分的值。

(1) $\iint_D \mathrm{d}\sigma, D: 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$

(2) $\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma, D: x^2+y^2 \leqslant R^2$

2. 根据二重积分的性质，比较下列积分的大小。

(1) 设 $I_1=\iint_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma, I_2=\iint_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 是由 x 轴、y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成，试比较 I_1 和 I_2 的大小。

(2) 设 $I_1=\iint_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma, I_2=\iint_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成，试比较 I_1 和 I_2 的大小。

3. 利用二重积分的性质，估计下列积分的值。

(1) $I=\iint\limits_D xy(x+y)\mathrm{d}\sigma$，$D$：$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$

(2) $I=\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma$，$D$：$x^2+y^2\leqslant 4$

(3) $I=\iint\limits_D \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+16}}$，$D$：$x^2+y^2\leqslant 9$

*4. 设有一平面薄片(不计其厚度)占有 xOy 面上的闭区域 D，薄片上分布有面密度为 $\mu=\mu(x,y)$ 的电荷，且 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续，试用二重积分表达该薄片上的全部电荷 Q。

7.2　二重积分的计算

按照二重积分的概念和性质来计算二重积分，对少数特别简单的被积函数和积分区域来说是可行的，但对一般的被积函数和积分区域来说，这不是一种切实可行的方法。本节介绍一种计算二重积分的方法，这种方法把二重积分化为两次定积分来计算。

7.2.1　利用直角坐标计算二重积分

1. 在直角坐标系下区域的表示

先讨论 xOy 面上的一类简单区域：对于任何穿过区域内部且平行于 x 轴或 y 轴的直线与区域边界的交点不多于两个。

由直线 $x=a$ 和 $x=b(a<b)$ 及曲线 $y=\varphi_1(x)$，$y=\varphi_2(x)$（$\varphi_1(x)<\varphi_2(x)$）围成的区域 D(见图 7-2-1)，注意到对于任何穿过区域 D 内部且平行于 y 轴的直线与区域 D 的边界的交点不多于两个，称区域 D 为 **X 型区域**，其可用集合表示为

$$D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\quad \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant \varphi_2(x)\}$$

也可以简记为

$$D: a\leqslant x\leqslant b,\quad \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant \varphi_2(x)$$

类似地，由直线 $y=c$ 和 $y=d(c<d)$ 及曲线 $x=\psi_1(y)$，$x=\psi_2(y)$（$\psi_1(y)<\psi_2(y)$）围成的区域 D(见图 7-2-2)，注意到对于任何穿过区域 D 内部且平行于 x 轴的直线与区域 D 的边界的交点不多于两个，称区域 D 为 **Y 型区域**，其可用集合表示为

$$D=\{(x,y)\mid c\leqslant y\leqslant d,\quad \psi_1(y)\leqslant x\leqslant \psi_2(y)\}$$

也可以简记为

$$D: c\leqslant y\leqslant d,\quad \psi_1(y)\leqslant x\leqslant \psi_2(y)$$

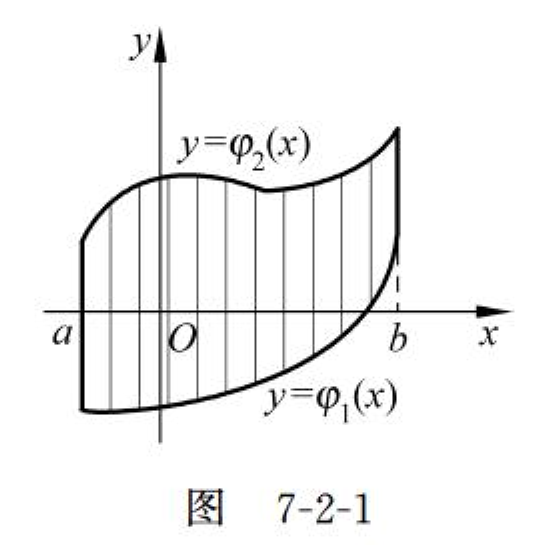


图　7-2-1

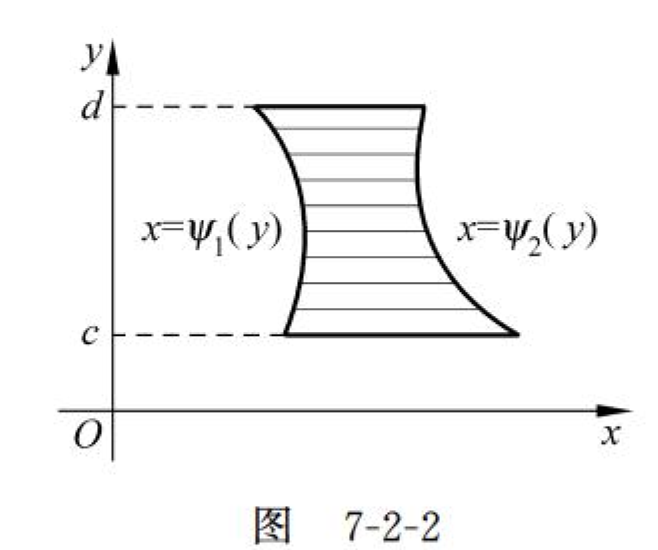


图　7-2-2

例 7-2-1 将由曲线 $y=x^2$, $y=2x$ 所围成的区域 D 分别用 X 型区域和 Y 型区域表示。

解 先画出其图形(见图 7-2-3),则 X 型区域表示为

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2, x^2\leqslant y\leqslant 2x\}$$

Y 型区域表示为

$$D=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 4, \frac{y}{2}\leqslant x\leqslant \sqrt{y}\right\}$$

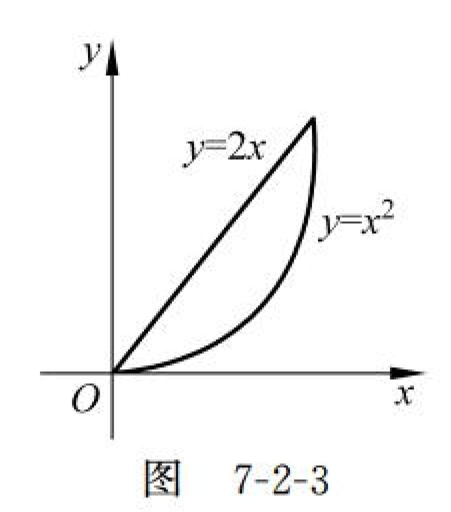


图 7-2-3

2. 化二重积分为累次积分

下面用几何观点来讨论二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的计算问题。假定 $f(x,y)\geqslant 0$,不妨设积分区域 D 为 X 型区域:$a\leqslant x\leqslant b$, $\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant \varphi_2(x)$,此时二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 在几何上表示以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶,以区域 D 为底的曲顶柱体(见图 7-2-4)的体积。可以应用 3.9 节介绍的"平行截面面积为已知的立体的体积"的方法来计算这个曲顶柱体的体积。

首先计算截面面积。为此,在区间 $[a,b]$ 中任意取定一点 x_0,作平行于 yOz 面的平面 $x=x_0$,该平面截曲顶柱体的截面(见图 7-2-4 的阴影部分)是一个以区间 $[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$ 为底,以曲线 $z=f(x_0,y)$ 为曲边的曲边梯形(见图 7-2-5),所以该截面的面积为

$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)\mathrm{d}y$$

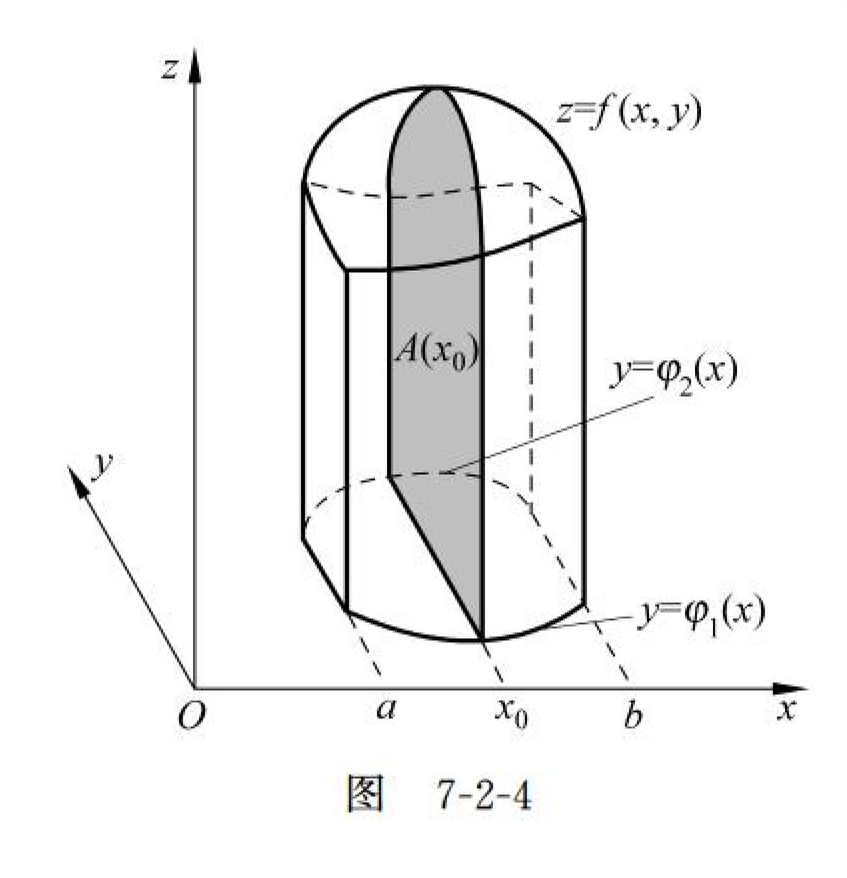


图 7-2-4

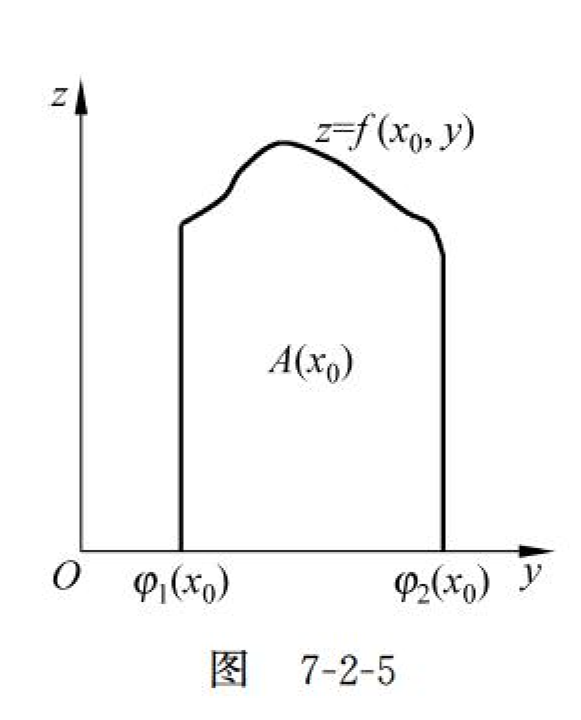


图 7-2-5

一般地,过区间 $[a,b]$ 上任意一点 x 且平行于 yOz 面的平面截曲顶柱体的截面的面积为

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

于是,根据平行截面面积为已知的立体体积的方法,得曲顶柱体体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

这个体积也就是所求二重积分的值,从而有以下等式:

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{7-2-1}$$

式(7-2-1)右端的积分称为**先对 y、后对 x 的二次积分**。就是说,先把 x 当作常量,把 $f(x,y)$看作 y 的函数,并对 y 计算从 $\varphi_1(x)$到 $\varphi_2(x)$的定积分;然后把算得的结果(是 x 的函数)再对 x 计算在区间$[a,b]$上的定积分。这个先对 y、后对 x 的二次积分也常记作 $\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$,于是式(7-2-1)也常写作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y \tag{7-2-1$'$}$$

这就是把二重积分化为先对 y、后对 x 的二次积分的公式。

类似地,如果区域 D 为 Y 型区域:$c\leqslant y\leqslant d,\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)$,则有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x \tag{7-2-2}$$

这就是把二重积分化为先对 x、后对 y 的二次积分的公式。上述二次积分公式右端的积分均称为**累次积分**。

注:(1) 在上述讨论中,假定 $f(x,y)\geqslant0$,但实际上式(7-2-1)和式(7-2-2)的成立不受此条件的限制。

(2) 累次积分与积分区域 D 的表示有密切的关系,X 型区域表示与式(7-2-1)中的累次积分相对应,而 Y 型区域表示与式(7-2-2)中的累次积分相对应。

(3) 累次积分的计算应从后往前进行。

例 7-2-2　计算 $\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由直线 $y=1,x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域。

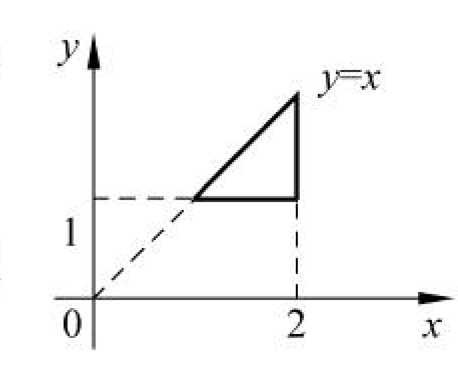


图　7-2-6

解　解法 1:画出积分区域 D(见图 7-2-6),可把 D 看成是 X 型区域:$1\leqslant x\leqslant2,1\leqslant y\leqslant x$,于是

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\left[\int_1^x xy\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_1^2\left[x\cdot\frac{y^2}{2}\right]_{y=1}^{y=x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2(x^3-x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\frac{9}{8}$$

注:积分还可以写成

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^x xy\,\mathrm{d}y=\int_1^2 x\,\mathrm{d}x\int_1^x y\,\mathrm{d}y$$

解法 2:也可把 D 看成是 Y 型区域:$1\leqslant y\leqslant2,y\leqslant x\leqslant2$,于是

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\left[\int_y^2 xy\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_1^2\left[y\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{x=y}^{x=2}\mathrm{d}y=\int_1^2\left(2y-\frac{y^3}{2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\left[y^2-\frac{y^4}{8}\right]_1^2=\frac{9}{8}$$

例 7-2-3 计算二重积分 $\iint\limits_D (2x-y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $2x-y+3=0$，$x+y-3=0$ 及 $y=1$ 所围成的区域。

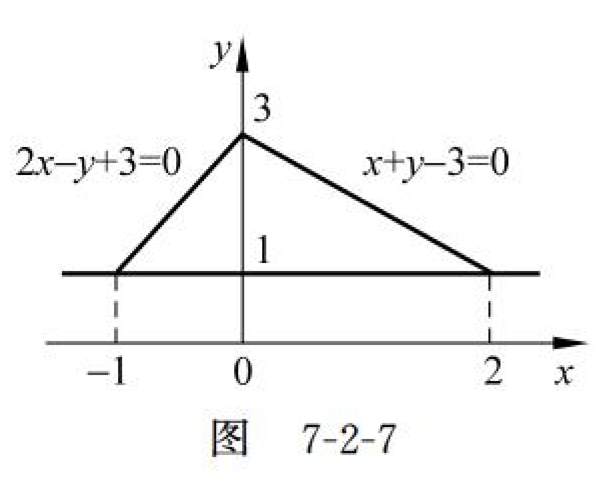


图 7-2-7

解 画出积分区域(见图 7-2-7)。若 D 视为 Y 型区域：$1\leqslant y\leqslant 3$，$\dfrac{y-3}{2}\leqslant x\leqslant 3-y$，则有

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (2x-y)\mathrm{d}\sigma &= \int_1^3 \mathrm{d}y\int_{\frac{y-3}{2}}^{3-y}(2x-y)\mathrm{d}x = \int_1^3 \left[x^2-xy\right]_{x=\frac{y-3}{2}}^{x=3-y}\mathrm{d}y \\ &= \int_1^3 \left[(3-y)^2-(3-y)y-\left(\frac{y-3}{2}\right)^2+\left(\frac{y-3}{2}\right)y\right]\mathrm{d}y \\ &= \frac{9}{4}\int_1^3 (y^2-4y+3)\mathrm{d}y = \frac{9}{4}\left[\frac{1}{3}y^3-2y^2+3y\right]_1^3 \\ &= -3\end{aligned}$$

注：本例中，由于区域 D 上方的边界是由两条不同的曲线组成的，所以，区域 D 若用 X 型区域表示，则须将区域 D 分割为左右两部分，即

$$\begin{aligned}D &= \{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 0, 1\leqslant y\leqslant 2x+3\} \\ &\quad \cup\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2, 1\leqslant y\leqslant 3-x\}\end{aligned}$$

于是得

$$\iint\limits_D (2x-y)\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_1^{2x+3}(2x-y)\mathrm{d}y+\int_0^2 \mathrm{d}x\int_1^{3-x}(2x-y)\mathrm{d}y = -3$$

本例用 X 型区域表示时计算二重积分较为复杂；而用 Y 型区域表示，计算就相对简单。

例 7-2-4 计算 $\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $y=1$，$x=-1$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域。

解 画出区域 D(见图 7-2-8)，可把 D 看成是 X 型区域：$-1\leqslant x\leqslant 1$，$x\leqslant y\leqslant 1$，于是

图 7-2-8

$$\begin{aligned}\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma &= \int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{3}\int_{-1}^1 \left[(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{y=x}^{y=1}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3}\int_{-1}^1 (|x|^3-1)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{3}\int_0^1 (x^3-1)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

注：本例中，也可把 D 看成是 Y 型区域：$-1\leqslant y\leqslant 1$，$-1\leqslant x\leqslant y$，于是

$$\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^1 y\mathrm{d}y\int_{-1}^y \sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}x$$

易见，化为先对 x、后对 y 的二次积分时，计算过程较为复杂，因此宜采用先对 y、后

对 x 的二次积分。通过例 7-2-3 和例 7-2-4 可以看出，把二重积分化为二次积分，往往需要选择恰当的二次积分的次序，这时，既要考虑积分区域 D 的形状，又要考虑被积函数 $f(x,y)$ 的特性。

* **例 7-2-5**　计算 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$。

分析　如果直接先对 x 求积分，则被积函数 e^{x^2} 的原函数不易求出。在这种情况下，可以考察先对 y 求积分，即交换积分次序。

解　首先将积分区域用点集表示，即 $\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1, y\leqslant x\leqslant 1\}$，对应的区域(见图 7-2-9)；再将图中的积分区域视为 X 型区域：$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x$；最后交换积分次序并求出该区域上的二次积分：

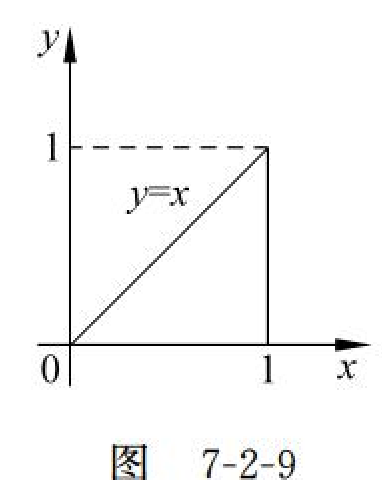


图　7-2-9

$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}[y]_{y=0}^{y=x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2} x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}[\mathrm{e}^{x^2}]_0^1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)$$

7.2.2　利用极坐标计算二重积分

对于有些积分区域而言，在直角坐标系下表示比较复杂，而该区域在极坐标系下表示相对简单，且被积函数用极坐标变量 ρ、θ 表达比较简单，这时可以考虑利用极坐标来计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$。

显然，将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 转换为极坐标形式，会遇到两个问题：一是如何把被积函数 $f(x,y)$ 转换为极坐标形式；二是如何把面积元素 $\mathrm{d}\sigma$ 转换为极坐标形式。

第一个问题是容易解决的。如果选取极点 O 作为直角坐标系的原点，极轴作为 x 轴，则由直角坐标与极坐标的关系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

可得

$$f(x,y) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

针对第二个问题，在极坐标系中，以从极点 O 出发的一族射线(θ 为常数)及以极点为中心的一族同心圆(ρ 为常数)构成的曲线网将区域 D 分为许多小闭区域，这些小闭区域除了靠近边界的一些不规则区域外，大多数是扇形域(见图 7-2-10)。当分割不断细微时，这些不规则区域的积分和趋向于 0，可以不必考虑。于是图 7-2-10 中阴影所示的小闭区域的面积近似等于以 $\rho\mathrm{d}\theta$ 为长、$\mathrm{d}\rho$ 为宽的矩形面积。因此在极坐标系中的面积元素可记为

$$\mathrm{d}\sigma = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

于是二重积分的极坐标形式为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \tag{7-2-3}$$

注：面积元素的极坐标形式中有一个因子 ρ，在运用中切勿遗漏！

若积分区域 D 在极坐标系下可表示为：$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\varphi_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\varphi_2(\theta)$，则

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho \tag{7-2-4}$$

这就是极坐标系中二重积分化为二次积分的公式。

例 7-2-6 计算 $\iint_D\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 为单位圆在第一象限内的部分。

分析 本题中，被积函数直接对 x 或对 y 求积分都很不容易求出原函数，故可以考虑转换为极坐标来进行尝试。

解 如图 7-2-11 所示，在极坐标系中，D 可表示为：$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\rho\leqslant1$，于是

$$\begin{aligned}\iint_D\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma&=\iint_D\ln(1+\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\ln(1+\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho\\&=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+\rho^2)\mathrm{d}(1+\rho^2)\\&=\frac{\pi}{4}\left\{[(1+\rho^2)\ln(1+\rho^2)]_0^1-\int_0^1(1+\rho^2)\mathrm{d}\ln(1+\rho^2)\right\}\\&=\frac{\pi}{4}(2\ln2-1)\end{aligned}$$

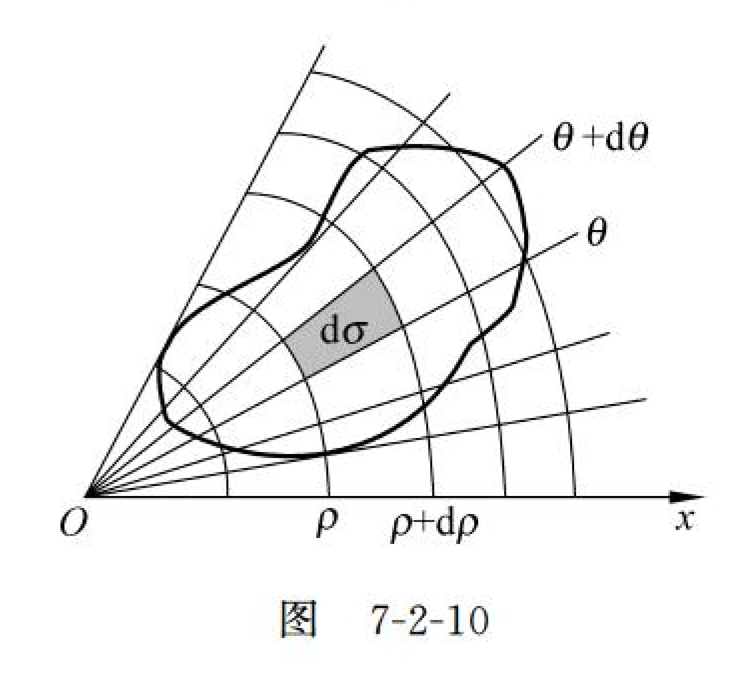


图 7-2-10

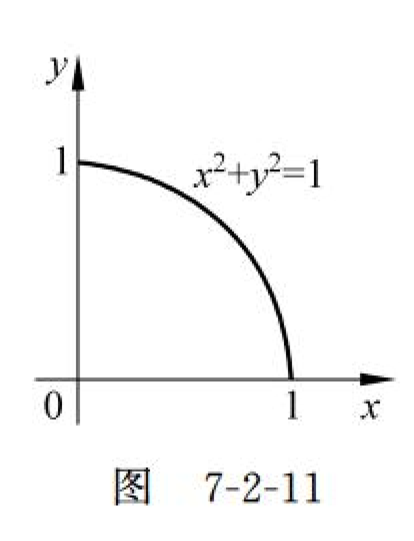


图 7-2-11

例 7-2-7 计算 $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 为圆：$x^2+y^2=2x$。

解 如图 7-2-12 所示，在极坐标系中，D 可表示为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\rho\leqslant2\cos\theta$，于是

$$\begin{aligned}\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma&=\iint_D\sqrt{\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^{2\cos\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$= \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{16}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{9}$$

注：若积分区域与圆有关系，而被积函数为 $f(x^2+y^2)$ 的形式，则可以优先考虑采用极坐标来计算二重积分。

* **例 7-2-8** 计算 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 $D: x^2+y^2 \leqslant R^2$。

解 如图 7-2-13 所示，在极坐标系中，闭区域 D 可表示为：$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$0\leqslant\rho\leqslant R$，于是

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D \mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^R \mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\rho^2}\right]_0^R \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-R^2})\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$= \pi(1-\mathrm{e}^{-R^2})$$

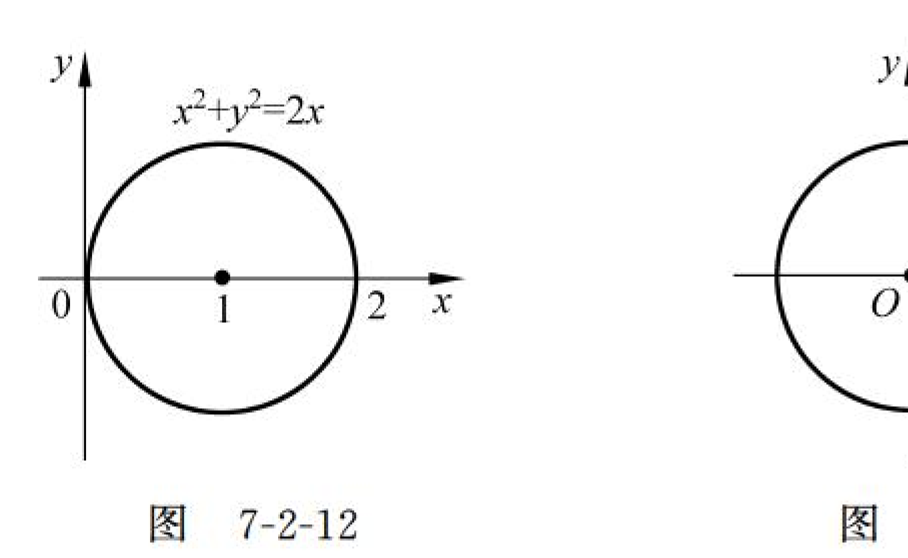


图 7-2-12　　　　图 7-2-13

注：此处积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 也经常直接写成 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。本题倘若直接用直角坐标计算，由于积分 $\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 不能用初等函数表示，所以很难算出来。

还可以利用本题的结果来计算工程上常用的反常积分(概率积分) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$。

当 $R\to+\infty$ 时，积分区域 D 为整个 xOy 平面，此时有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{R\to+\infty}\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{R\to+\infty}\pi(1-\mathrm{e}^{-R^2})$$

另一方面，由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2$$

从而有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

或

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

习题 7-2

1．在直角坐标系中，用联立不等式表示下列平面区域 D。

(1) D 是由 $x=0,y=0$ 以及 $x+y=1$ 所围成；

(2) D 是由 $y=2,y=x$ 以及 $y=2x$ 所围成；

(3) D 是由 $x=1,x=2,y=2$ 以及 $y=\dfrac{1}{x}$ 所围成；

(4) D 是 $x^2+y^2\leqslant 4$ 和 $y\geqslant 0$ 的公共部分。

2．计算下列二重积分。

(1) $\iint\limits_D (100+x+y)\,\mathrm{d}\sigma$，$D$：$0\leqslant x\leqslant 1$，$-1\leqslant y\leqslant 1$；

(2) $\iint\limits_D x\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}\sigma$，$D$：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$；

(3) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{6x+y}\,\mathrm{d}\sigma$，其中，$D$ 是由直线 $x=-1,x=2$ 以及 $y=1,y=2$ 所围成；

(4) $\iint\limits_D (3x+2y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中，$D$ 是由两坐标轴与直线 $x+y=2$ 所围成；

(5) $\iint\limits_D x\sqrt{y}\,\mathrm{d}\sigma$，其中，$D$ 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$，$y=x^2$ 所围成；

(6) $\iint\limits_D \dfrac{y}{x}\,\mathrm{d}\sigma$，其中，$D$ 是由直线 $x=1,x=2,y=x$ 以及 $y=2x$ 所围成；

(7) $\iint\limits_D \cos(y^2)\,\mathrm{d}\sigma$，其中，$D$ 是由直线 $y=1,y=x$ 以及 y 轴所围成。

3．化二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 为二次积分(分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分)，其中，积分区域 D 是由直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=4x$ 所围成。

4．改变下列二次积分的积分次序。

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　(2) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

(3) $\int_1^2 \mathrm{d}x\int_x^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y$　　(4) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$

5．利用极坐标计算下列各题。

(1) $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，$D$：$\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2$；

(2) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中，$D$ 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成；

(3) $\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}\,\mathrm{d}\sigma$，其中，$D$ 是由直线 $y=0,y=x$ 及圆周 $x^2+y^2=1,x^2+y^2=4$ 所围成的在第一象限内的闭区域；

(4) $\iint\limits_D \left(\dfrac{y}{x}\right)^2\mathrm{d}\sigma$，其中，$D$ 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$、直线 $y=x$ 与 x 轴围成的闭区域；

(5) $\iint\limits_D \frac{x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,其中,$D$ 是圆环 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$ 在第一象限内的闭区域。

*7.3　三重积分

7.3.1　三重积分的概念

在定积分和二重积分的概念中,我们曾处理过一个共同的实例,就是求一个质量分布不均匀的物体的质量。如果已知物体的密度是该物体上点 P 的连续函数 $f(P)$,那么根据物体的不同的几何形状,物体的质量变化即可引出不同的积分概念。

(1) 物体是一根细的直线棒,则非均匀细棒的质量为

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

它就是线密度函数 $f(x)$在直线棒所占区间$[a,b]$上的定积分。

(2) 物体是一块平面薄片,则非均匀薄片的质量为

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

它就是面密度函数 $f(x,y)$在薄片所占平面区域 D 上的二重积分。

(3) 物体是一个空间立体,它所占有的空间区域为 Ω,那么如何计算它的质量呢?

与处理细的直线棒、平面薄片形状的物体一样,我们可以把立体 Ω 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta v_i(i=1,2,\cdots,n)$,且以 Δv_i 表示第 i 个小立体的体积。在小立体 Δv_i 上任取一点(ξ_i,η_i,ζ_i),显然小立体 Δv_i 的质量近似地等于

$$f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

于是立体 Ω 的总质量近似地等于

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

再令 λ 表示这 n 个小立体的最大直径(直径意义同前所述),我们自然会想到,当 $\lambda\to 0$ 时,上面和式就会趋于立体 Ω 的总质量,即

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

这一和式的极限与定积分、二重积分的和式极限结构形式非常类似,它不仅在质量计算中,而且在物理、力学、工程技术中也经常会遇到,由此我们引入三重积分的定义。

定义 7-3-1　设 $f(x,y,z)$是空间有界闭区域 Ω 上的有界函数。将 Ω 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta v_i(i=1,2,\cdots,n)$,且以 Δv_i 表示第 i 个小闭区域的体积,在每个 Δv_i 上任取一点(ξ_i,η_i,ζ_i),作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i(i=1,2,\cdots,n)$,并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$。如果当各小闭区域的直径中的最大值 λ 趋于零时,这个和的极限总存在,则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分,记作$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v$,即

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i \tag{7-3-1}$$

其中，$\iiint$ 称为三重积分号；$f(x,y,z)$ 称为被积函数；$f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 称为被积表达式；$\mathrm{d}v$ 称为体积元素；x,y,z 称为积分变量；Ω 称为积分区域。此时我们也称函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积。

注：(1) 在直角坐标系中，如果用平行于坐标面的平面来划分 Ω，这样除了包含边界点的一些不规则小闭区域外，其余的小闭区域都是长方体。设长方体闭区域 Δv_i 的边长为 $\Delta x_j,\Delta y_k$ 和 Δz_l，则 $\Delta v_i=\Delta x_j\Delta y_k\Delta z_l$，于是在直角坐标系下，有时把体积元素 $\mathrm{d}v$ 记作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，而把三重积分记作 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 称为直角坐标系中的体积元素。

(2) 当函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上连续时，极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$ 是存在的，因此 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的三重积分是存在的，以后我们总假定 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上是连续的。

借用三重积分的概念，我们知道，空间立体 Ω 的质量是密度函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的三重积分，即

$$M=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$$

由于三重积分的定义域定积分、二重积分的定义十分类似，因此它也有与定积分、二重积分相类似的性质。这里我们不再一一叙述，仅列举下面几个，其余请读者自己补充。

(1) $\iiint\limits_{\Omega}[c_1 f(x,y,z)\pm c_2 g(x,y,z)]\mathrm{d}v = c_1\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v \pm c_2\iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)\mathrm{d}v$；

(2) 当 Ω 被有限张曲面分成 Ω_1 和 Ω_2 时，有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}v + \iiint_{\Omega_2} f(x,y,z)\mathrm{d}v$$

(3) $\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v = V$，其中 V 为区域 Ω 的体积。

7.3.2 三重积分的计算

计算三重积分的基本方法是将三重积分转换为三次积分(累次积分)。下面按不同坐标系来分别讨论将三重积分转换为三次积分的方法，且仅限于叙述方法。

1. 利用直角坐标计算三重积分

三重积分转换为累次积分的关键还在于确定上下限。如图 7-3-1 所示，如果平行于 z 轴且穿过 Ω 内部的直线与 Ω 边界曲面的交点不超过两个，那么它的定限步骤如下。

(1) 将空间闭区域 Ω 投影到 xOy 面，得到一个平面闭区域 D_{xy}。

(2) 在 D_{xy} 内任取一点 (x,y)，作平行于 z 轴的直线 l，与边界曲面的交点的竖坐标为

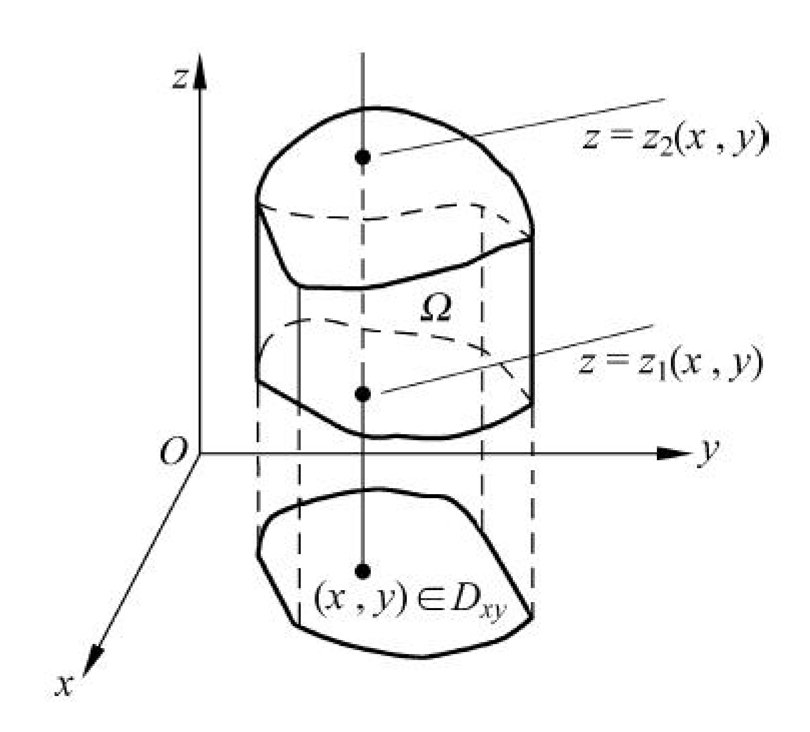


图 7-3-1

$z_1(x,y)$和 $z_2(x,y)$。假定 $z_1(x,y)\leqslant z_2(x,y)$,这样 Ω 可以表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}\}$$

先将 x,y 看作常量,将 $f(x,y,z)$只看作 z 的函数,在区间$[z_1(x,y),z_2(x,y)]$上对 z 积分,得到一个二元函数 $F(x,y)$。

$$F(x,y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

然后计算 $F(x,y)$在闭区域 D_{xy} 上的二重积分。假设闭区域 D_{xy} 为 X 型区域,即

$$D_{xy}=\{(x,y)\mid y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}$$

则

$$\iint\limits_{D_{xy}}F(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}y$$

这就完成了 $f(x,y,z)$在空间闭区域 Ω 上的三重积分。因此

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z \tag{7-3-2}$$

公式(7-3-2)把三重积分转换为先对 z 再对 y,最后对 x 的三次积分。

注:如果平行于 x 轴(或 y 轴)且穿过闭区域 Ω 内部的直线与 Ω 边界曲面的交点不超过两个,也可以把 Ω 投影到 yOz 面(或 xOz 面),这样可以把三重积分转换为按其他顺序的三次积分。

例 7-3-1 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}xz\mathrm{d}v$,其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x+y+z=1$ 所围成的闭区域。

解 作闭区域 Ω(见图 7-3-2),将 Ω 投影到 xOy 面,得投影区域 D_{xy} 为三角形闭区域 OAB,所以 $D_{xy}=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1-x,0\leqslant x\leqslant 1\}$。在 D_{xy} 内任取一点(x,y),作平行于 z 轴的直线,该直线通过平面 $z=0$ 穿入 Ω 内,然后通过平面 $z=1-x-y$ 穿出 Ω 外,于是

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}xz\mathrm{d}v&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}xz\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2}\int_0^1x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\mathrm{d}(1-x-y)$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1 x\left[(1-x-y)^3\right]_{y=0}^{y=1-x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1 x(1-x)^3\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^3\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^4\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{1}{24}(1-x)^4+\frac{1}{30}(1-x)^5\right]_0^1=\frac{1}{120}$$

有时，计算一个三重积分时，也可以先计算一个二重积分，再计算一个定积分。设空间闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,c_1\leqslant z\leqslant c_2\}$，其中 D_z 是竖坐标为 z 的平面截空间闭区域 Ω 所得到的一个平面闭区域（见图 7-3-3），则有

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\iint_{D_z}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7-3-3}$$

例 7-3-2 计算三重积分 $\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。

解 空间闭区域 Ω（见图 7-3-4）可表示为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}\quad(-c\leqslant z\leqslant c)$$

于是
$$\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-c}^{c}z^2\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi ab\int_{-c}^{c}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)z^2\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3$$

图 7-3-2

图 7-3-3

图 7-3-4

2. 利用柱面坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)$ 为空间内一点，并设点 M 在 xOy 面上的投影 P 的极坐标为 $P(\rho,\theta)$，则 ρ,θ,z 这样的三个数就叫作点 M 的**柱面坐标**（见图 7-3-5）。这里规定 ρ,θ,z 的变化范围为

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\rho<+\infty,-\infty<z<+\infty$$

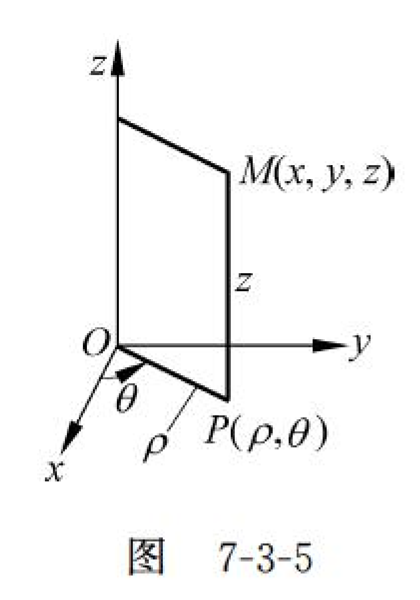


图　7-3-5

点 M 的直角坐标与柱面坐标的关系为

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

简单来说，由 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$ 可得柱面坐标系中的体积元素 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$，从而在柱面坐标系中三重积分可转换为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \qquad (7\text{-}3\text{-}4)$$

例 7-3-3　利用柱面坐标计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。

解　闭区域 Ω 可表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\rho\leqslant 2,\quad \rho^2\leqslant z\leqslant 4$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iiint_{\Omega} z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^4 z\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho(16-\rho^4)\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\pi\left[8\rho^2-\frac{1}{6}\rho^6\right]_0^2 = \frac{64}{3}\pi\end{aligned}$$

注： 例 7-3-3 还有另一解法，Ω 可表示为 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x^2+y^2\leqslant z, 0\leqslant z\leqslant 4\}$，于是

$$\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^4 z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^4 z\pi z\mathrm{d}z = \left[\frac{\pi}{3}z^3\right]_0^4 = \frac{64}{3}\pi$$

*3. 利用球面坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)$ 为空间内一点，则点 M 也可用 r,φ,θ 这样三个有次序的数来确定。其中，r 为原点 O 与点 M 间的距离；φ 为 $\overrightarrow{OM}$ 与 z 轴正向所夹的角，θ 为从正 z 轴来看自 x 轴按逆时针方向转到有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的角。P 为点 M 在 xOy 面上的投影，r,φ,θ 这样的三个数叫作点 M 的**球面坐标**（见图 7-3-6），这里 r,φ,θ 的变化范围为

$$0\leqslant r<+\infty,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

点 M 的直角坐标与球面坐标的关系如下：

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

图　7-3-6

不难证明，球面坐标系中的体积元素 $\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$，因此，在球面坐标系中三重积分可转换为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \qquad (7\text{-}3\text{-}5)$$

例 7-3-4 在球面坐标系中计算$\iiint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}v$，$\Omega$：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$。

解 在球面坐标系下，Ω 可表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant r\leqslant 1$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}v&=\iiint\limits_{\Omega} r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r=\frac{4}{15}\pi\end{aligned}$$

习题 7-3

1. 将三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 转换为三次积分，其中积分区域 Ω 分别如下。

(1) 由旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围成的闭区域；

(2) 由平面 $z=0$，$x+y=1$ 与双曲抛物面 $xy=z$ 所围成的闭区域。

2. 设有一物体，占有空间闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1\}$，在点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)=x+y+z$，计算该物体的质量。

3. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\mathrm{d}v$，其中 Ω 为长方体：$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2,0\leqslant z\leqslant 3$。

4. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。

5. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由锥面 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h$ $(R>0,h>0)$ 所围成的闭区域。

6. 在柱面坐标系中计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中，$\Omega$ 是由旋转抛物面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=2$ 所围成的闭区域。

(2) $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，其中，$\Omega$ 是由旋转抛物面 $x^2+y^2=z$ 与球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围成的闭区域。

*7. 利用球面坐标求三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}v$。其中，$\Omega$：$\pi^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4\pi^2$。

*8. 求球面 $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ 与半顶角为 α 的内接锥面 $\varphi=\alpha$ 所围成的立体的体积。

*7.4 对弧长的曲线积分

二重积分和三重积分已经把积分概念从积分范围为数轴上一个区间的情形推广到积分范围为平面或空间内的一个闭区域的情形。本节及后面几节将把积分概念推广到积分范围为一段曲线弧的情形,这就是曲线积分。曲线积分通常有两类,对弧长的曲线积分和对坐标的曲线积分。

7.4.1 对弧长的曲线积分的概念与性质

引例 曲线形构件的质量。

设一曲线形构件所占的位置在 xOy 面内的一段曲线弧 L 上(见图 7-4-1),已知曲线形构件在点(x,y)处的线密度为 $\mu(x,y)$,求曲线形构件的质量 m。与前面的处理方法完全类似,把曲线分成 n 小段:$\Delta s_1,\Delta s_2,\cdots,\Delta s_n$($\Delta s_i$ 也表示弧长$\widehat{M_{i-1}M_i}$。任取$(\xi_i,\eta_i)\in\Delta s_i$,得第 i 个小段质量的近似值为 $\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$,则整个构件的质量为 $m\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$。令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}\to 0$,则整个物质曲线的质量为

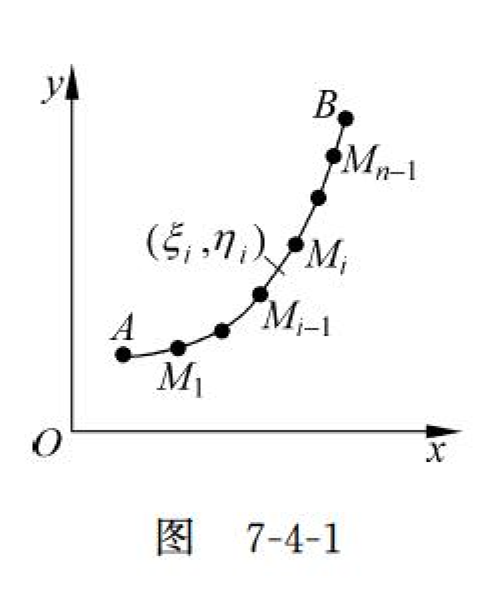


图 7-4-1

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

这种和的极限在研究其他问题时也会遇到,由此引出下面的定义。

定义 7-4-1 设 L 为 xOy 面内的一条光滑曲线弧,函数 $f(x,y)$ 在 L 上有界。在 L 上任意插入一个点列 $M_1,M_2,\cdots,M_{n-1}$ 把 L 分成 n 个小段。设第 i 个小段的长度为 Δs_i,又因为(ξ_i,η_i)为第 i 个小段上任意取定的一点,作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i(i=1,2,\cdots,n)$,并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$。如果当各小弧段的长度的最大值 $\lambda\to 0$ 时,这个和的极限总存在,则称此极限为**函数 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上对弧长的曲线积分**或**第一类曲线积分**,记作$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$,即

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

其中,$f(x,y)$称为**被积函数**;L 称为**积分弧段**;$\mathrm{d}s$ 称为**弧长元素**。

注:

(1) 当 $f(x,y)$ 在光滑曲线弧 L 上连续时,对弧长的曲线积分$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 是存在的。以后我们总假定 $f(x,y)$ 在 L 上是连续的。

(2) 当 Γ 为空间曲线时,完全类似的有 $\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$。

(3) 如果 L(或 Γ)是分段光滑的,则规定函数在 L(或 Γ)上的曲线积分等于函数在光

滑的各段上的曲线积分的和。例如设 L 可分成两段光滑曲线弧 L_1 及 L_2，则规定

$$\int_{L_1+L_2} f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s + \int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s$$

（4）如果 L 是闭合曲线，那么函数 $f(x,y)$ 在闭合曲线 L 上对弧长的曲线积分，记作 $\oint_L f(x,y)\mathrm{d}s$。

根据对弧长的曲线积分的定义，曲线形构件的质量就是曲线积分 $\int_L \mu(x,y)\mathrm{d}s$ 的值。其中，$\mu(x,y)$ 为线密度。

对弧长的曲线积分的性质也与定积分、重积分非常相似，下面仅列举几个，读者可以把其余的性质补充完整。

性质 7-4-1 设 c_1 和 c_2 为常数，则

$$\int_L [c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y)]\mathrm{d}s = c_1\int_L f(x,y)\mathrm{d}s + c_2\int_L g(x,y)\mathrm{d}s$$

性质 7-4-2 若积分弧段 L 可分成两段光滑曲线弧 L_1 和 L_2，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s + \int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s$$

性质 7-4-3 设在 L 上 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s \leqslant \int_L g(x,y)\mathrm{d}s$$

特别地，有

$$\left|\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_L |f(x,y)|\mathrm{d}s$$

性质 7-4-4 若在 L 上 $f(x,y)=1$，s 为 L 的长度，则 $\int_L 1\mathrm{d}s = \int_L \mathrm{d}s = s$。

7.4.2 对弧长的曲线积分的计算法

结合前几章介绍过的弧长元素的计算公式，我们很容易得到如下定理。

定理 7-4-1 设 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上有定义且连续，L 的参数方程为 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，其中 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 存在，且

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t \quad (\alpha<\beta) \qquad (7\text{-}4\text{-}1)$$

证明 略。

注：公式(7-4-1)表明，计算对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 时，只须把 x，y，$\mathrm{d}s$ 分别转换为 $\varphi(t)$，$\psi(t)$，$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$，然后从 α 到 β 作定积分就行。值得注意的是，这里转换成的定积分下限 α 一定要小于上限 β。

下面讨论几种特殊情况，仅列出结果，读者可以自己论证一下。

（1）若曲线 L 的方程为 $y=\psi(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f[x,\psi(x)]\sqrt{1+\psi'^2(x)}\mathrm{d}x \tag{7-4-2}$$

(2) 若曲线 L 的方程为 $x=\varphi(y)$ $(c\leqslant y\leqslant d)$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_c^d f[\varphi(y),y]\sqrt{\varphi'^2(y)+1}\mathrm{d}y \tag{7-4-3}$$

(3) 若空间曲线 Γ 的方程为 $x=\varphi(t),y=\psi(t),z=\omega(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，则

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\mathrm{d}t \tag{7-4-4}$$

例 7-4-1　计算$\int_L\sqrt{y}\,\mathrm{d}s$，其中，$L$ 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $O(0,0)$ 与点 $A(1,1)$ 之间的一段弧。

解　如图 7-4-2 所示，曲线的方程为 $y=x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$，因此

$$\int_L\sqrt{y}\,\mathrm{d}s=\int_0^1\sqrt{x^2}\sqrt{1+(x^2)'^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$

例 7-4-2　计算$\oint_L(x+y)\mathrm{d}s$，其中，L 为 x 轴上直线段 AB 与上半圆弧$\overset{\frown}{BCA}$组成的闭合曲线(见图 7-4-3)。

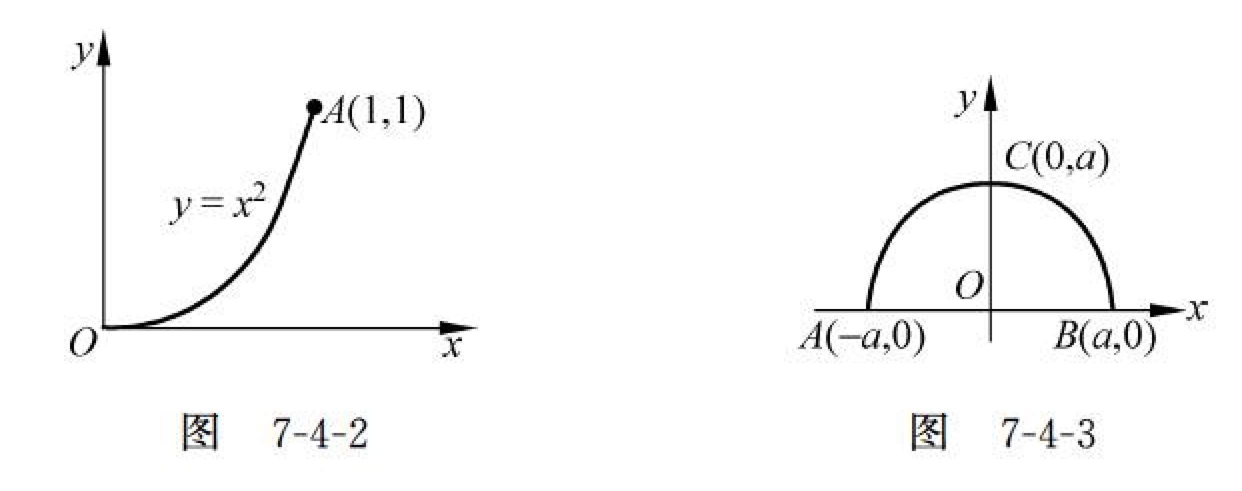


图　7-4-2　　　　图　7-4-3

解　由曲线积分的性质知

$$\oint_L(x+y)\mathrm{d}s=\int_{AB}(x+y)\mathrm{d}s+\int_{\overset{\frown}{BCA}}(x+y)\mathrm{d}s$$

而直线段 AB 的方程为 $y=0(-a\leqslant x\leqslant a)$，所以，由公式(7-4-2)有

$$\int_{AB}(x+y)\mathrm{d}s=\int_{-a}^a(x+0)\sqrt{1^2+0^2}\mathrm{d}x=\int_{-a}^a x\mathrm{d}x=0$$

又上半圆弧$\overset{\frown}{BCA}$的参数方程为 $x=a\cos t,y=a\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$，故由公式(7-4-1)有

$$\oint_{\overset{\frown}{BCA}}(x+y)\mathrm{d}s=\int_0^\pi a(\cos t+\sin t)\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int_0^\pi(\cos t+\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=a^2[\sin t-\cos t]_0^\pi=2a^2$$

因此

$$\oint_L(x+y)\mathrm{d}s=2a^2$$

例 7-4-3　计算曲线积分$\int_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，其中，$\Gamma$ 为螺旋线 $x=a\cos t,y=a\sin t$，

$z=kt$ 上相应于 t 从 0 到达 2π 的一段弧。

解　在曲线 Γ 上有 $x^2+y^2+z^2=(a\cos t)^2+(a\sin t)^2+(kt)^2=a^2+k^2t^2$，并且

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

于是

$$\int_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2)$$

习题 7-4

求下列对弧长的曲线积分。

(1) $\int_L y^2\mathrm{d}s$，其中，L 为圆弧 $x=R\cos t, y=R\sin t(-\alpha\leqslant t\leqslant\alpha)$。

(2) $\int_L(x+y)\mathrm{d}s$，其中，L 为连接(1,0)和(0,1)两点的直线段。

(3) $\oint_L(x^2+y^2)^n\mathrm{d}s$，其中，$L$ 为圆周 $x=R\cos t, y=R\sin t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$（$n$ 为常数）。

(4) $\oint_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中，$L$ 为圆周 $x^2+y^2=R^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界。

(5) $\int_\Gamma x^2yz\mathrm{d}s$，其中，$\Gamma$ 为折线 $OABC$，而 $O(0,0,0)$，$A(0,0,2)$，$B(1,0,2)$，$C(1,3,2)$。

*(6) $\oint_\Gamma\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$，其中 Γ 为曲线 $x=\mathrm{e}^t\cos t, y=\mathrm{e}^t\sin t, z=\mathrm{e}^t$ 上相应于 t 从 0 变化到 2 的这段弧。

*7.5　对坐标的曲线积分

7.5.1　对坐标的曲线积分的概念与性质

引例　变力沿曲线所做的功。

设一个质点在 xOy 面内受到力 $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 的作用，从点 A 沿光滑曲线弧 L 移动到点 B，其中函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 L 上连续。试求变力 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 所做的功（见图 7-5-1）。

我们知道，如果力 $\boldsymbol{F}$ 是恒力，且质点从点 A 沿直线移动到点 B，那么恒力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功等于向量 $\boldsymbol{F}$ 与向量的数量积，即 $W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}$。而现在 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 是变力，且质点沿曲线移动，故不能直接用以上公式计算所求的功。然而，可以借鉴 7.4 节用来处理曲线形构件的方法来解决这个问题。

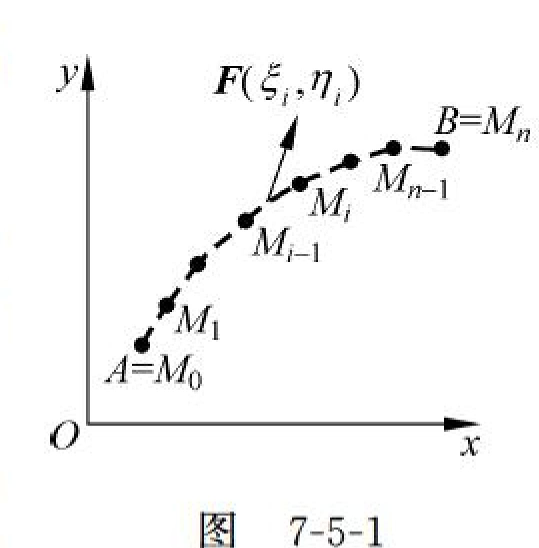


图　7-5-1

先用有向曲线弧 L 上的点 $M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$，…，$M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$ 把 L 分成 n 个小弧段，取其中一个有向小弧段

$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$来分析。由于$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$光滑而且很短，可以用有向线段$\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=(\Delta x_i)\boldsymbol{i}+(\Delta y_i)\boldsymbol{j}$来近似代替它。其中，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$。又因为函数$P(x,y)$，$Q(x,y)$在$L$上连续，可以用$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$上任意取定的一点$(\xi_i,\eta_i)$处的力

$$\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i)=P(\xi_i,\eta_i)\boldsymbol{i}+Q(\xi_i,\eta_i)\boldsymbol{j}$$

来代替这小弧段上各点处的力。这样变力$\boldsymbol{F}(x,y)$沿有向小弧段$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$所做的功$\Delta W_i$可以近似等于恒力$\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i)$沿直线段$\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$所作的功，即

$$\Delta W_i\approx\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

于是，变力$\boldsymbol{F}(x,y)$在有向曲线弧$\overset{\frown}{AB}$上所做的功近似为

$$W=\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i\approx\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]\tag{7-5-1}$$

最后，令λ表示这n个小弧段长度的最大值。当$\lambda\to0$，公式(7-5-1)右端的极限如果存在，则这个极限就自然被认为是变力$\boldsymbol{F}(x,y)$在有向曲线弧$\overset{\frown}{AB}$上所做的功的精确值，即

$$W=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$$

这种和的极限在研究其他问题时也经常会遇到，现在引出如下定义。

定义 7-5-1　设L为xOy面内从点A到点B的一段有向光滑曲线弧，函数$P(x,y)$，$Q(x,y)$在L上有界。在L上沿L的方向任意插入一个点列$M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$，…，$M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$，把L分成n个有向小弧段$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$（$i=1,2,\cdots,n$；$M_0=A$，$M_n=B$）。设$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$，$(\xi_i,\eta_i)$为$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$上任意取定的点，当各小弧段长度的最大值$\lambda\to0$，如果极限$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$存在，则称此极限为**函数$P(x,y)$在有向曲线$L$上对坐标$x$的曲线积分**，记作$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x$，即

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$$

类似地，如果极限$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$存在，则称此极限为**函数$Q(x,y)$在有向曲线$L$上对坐标$y$的曲线积分**，记作$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$，即

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

其中，$P(x,y)$，$Q(x,y)$叫作被积函数，L叫作积分弧段。

对坐标的曲线积分也称为第二类曲线积分。

设Γ为空间内一条光滑有向曲线，函数$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$在Γ上有定义且有界，作如下定义（假如各式右端的极限存在）：

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i$$

$$\int_{\Gamma} Q(x,y,z)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i$$

$$\int_{\Gamma} R(x,y,z)\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i$$

在应用上，经常把对坐标的曲线积分表示成如下简写形式：

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + \int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

也可以写成向量形式

$$\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

其中，$\boldsymbol{F}(x,y) = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j}$。

类似地，把$\int_{\Gamma} P(x,y,z)\mathrm{d}x + \int_{\Gamma} Q(x,y,z)\mathrm{d}y + \int_{\Gamma} R(x,y,z)\mathrm{d}z$简写为

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z \quad 或 \quad \int_{\Gamma} \boldsymbol{A}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

其中，$\boldsymbol{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k}$。

这样，引例中讨论的变力所做的功为

$$W = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y \quad 或 \quad W = \int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

类似地，对坐标的曲线积分也有相应的性质，下面仅列举几个，读者可以比照对弧长的曲线积分的性质。

性质 7-5-1 如果有向曲线弧 L 可以分成两段光滑曲线弧 L_1 和 L_2，则

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

性质 7-5-2 设 L 是有向曲线弧，L^-是与 L 方向相反的有向曲线弧，则

$$\int_{L^-} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = -\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

注：对坐标的曲线积分，必须注意积分弧段的方向。

7.5.2 对坐标的曲线积分的计算

定理 7-5-1 设 $P(x,y)$、$Q(x,y)$是定义在光滑有向曲线 L：$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$上的连续函数，当参数 t 单调地由 α 变到 β 时，点 $M(x,y)$从 L 的起点 A 沿 L 运动到终点 B，$\varphi(t)$，$\psi(t)$在以 α 和 β 为端点的闭区间上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则曲线积分$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$存在，且

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t \tag{7-5-2}$$

证明 略。

注：下限 α 对应于 L 的起点，上限 β 对应于 L 的终点，α 不一定小于 β 。

公式(7-5-2)容易推广到空间曲线 Γ：$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$z=\omega(t)$的情形。

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$
$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$$
$$+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\mathrm{d}t \tag{7-5-3}$$

其中，α 对应 Γ 的起点，β 对应 Γ 的终点。

例 7-5-1　计算$\int_L y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，其中 L 为圆周 $x=a\cos t, y=a\sin t$ 上对应于 t 从 0 到 $\frac{\pi}{4}$ 的一段弧。

解　由公式(7-5-2)可得

$$\int_L y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[a\sin t\cdot(a\cos t)'+a\cos t(a\sin t)']\mathrm{d}t$$
$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}[\sin 2t]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{2}$$

例 7-5-2　计算$\int_L y^2\mathrm{d}x$。其中 L 分别为如下曲线和线段(见图 7-5-2)：

(1) 按逆时针方向绕行的上半圆周 $x^2+y^2=a^2$；

(2) 从点 $A(a,0)$沿 x 轴到点 $B(-a,0)$的直线段。

解　(1) L 的参数方程为 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$，$\theta$ 从 0 变到 π，因此

$$\int_L y^2\mathrm{d}x=\int_0^\pi a^2\sin^2\theta(-a\sin\theta)\mathrm{d}\theta=a^3\int_0^\pi(1-\cos^2\theta)\mathrm{d}\cos\theta=-\frac{4}{3}a^3$$

(2) L 的方程为 $y=0$，x 从 a 变到 $-a$。因此

$$\int_L y^2\mathrm{d}x=\int_a^{-a}0^2\mathrm{d}x=0$$

例 7-5-3　计算$\int_L 2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$，其中 L 分别为如下 3 条曲线(见图 7-5-3)：

(1) 抛物线 $y=x^2$ 上从 $O(0,0)$到 $B(1,1)$的一段弧；

(2) 抛物线 $x=y^2$ 上从 $O(0,0)$到 $B(1,1)$的一段弧；

(3) 从 $O(0,0)$到 $A(1,0)$，再到 $B(1,1)$的有向折线 OAB。

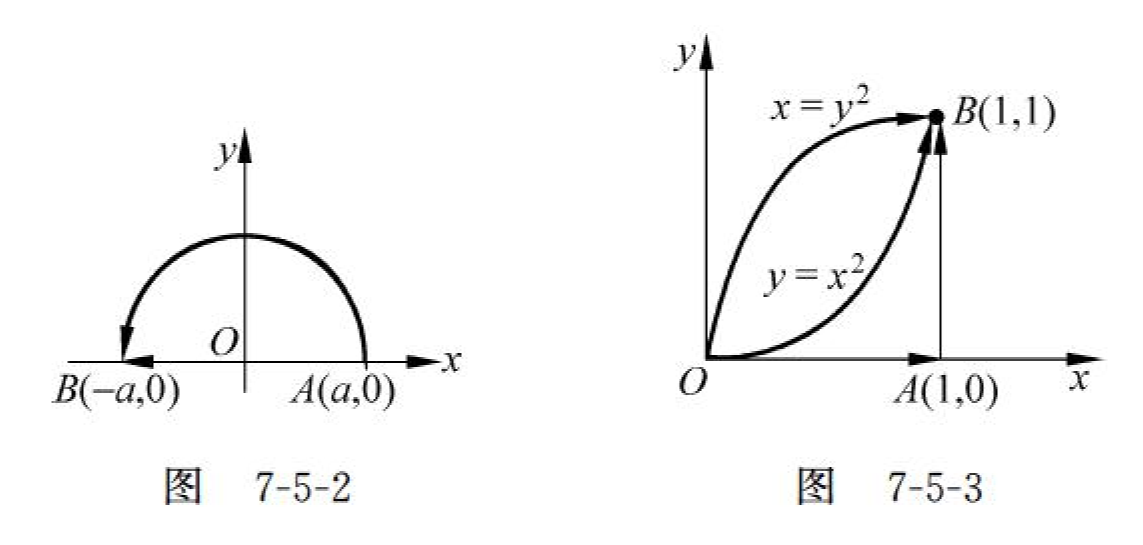


图　7-5-2　　　图　7-5-3

解　(1) L：$y=x^2$，x 从 0 变到 1。所以

$$\int_L 2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\int_0^1(2x\cdot x^2+x^2\cdot 2x)\mathrm{d}x=4\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=1$$

(2) L：$x=y^2$，y 从 0 变到 1。所以

$$\int_L 2xy\,dx+x^2\,dy=\int_0^1(2y^2\cdot y\cdot 2y+y^4)\,dy=5\int_0^1 y^4\,dy=1$$

(3) OA：$y=0$，x 从 0 变到 1；AB：$x=1$，y 从 0 变到 1。

$$\begin{aligned}\int_L 2xy\,dx+x^2\,dy&=\int_{OA}2xy\,dx+x^2\,dy+\int_{AB}2xy\,dx+x^2\,dy\\&=\int_0^1(2x\cdot 0+x^2\cdot 0)\,dx+\int_0^1(2y\cdot 0+1)\,dy=0+1=1\end{aligned}$$

从例 7-5-2 和例 7-5-3 可以看出，虽然两个曲线积分的被积函数相同，起点和终点也对应相同，但是沿不同路径得到的积分值可能不相等，也可能相等。这一现象并不偶然，在 7.6 节还将进一步讨论。

例 7-5-4 计算$\int_\Gamma x^2\,dx+z\,dy-y\,dz$，其中$\Gamma$为螺旋线$x=k\theta$，$y=a\cos\theta$，$z=a\sin\theta$上对应$\theta$从 0 到$\pi$的一段弧。

解 由公式(7-5-2)可得

$$\begin{aligned}\int_\Gamma x^2\,dx+z\,dy-y\,dz&=\int_0^\pi[(k\theta)^2\cdot k+a\sin\theta\cdot(-a\sin\theta)-a\cos\theta\cdot a\cos\theta]\,d\theta\\&=\int_0^\pi(k^3\theta^2-a^2)\,d\theta=\frac{k^3\pi^3}{3}-a^2\pi\end{aligned}$$

例 7-5-5 设一个质点在 $M(x,y)$ 处受到力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，$\boldsymbol{F}$ 的大小与 M 到原点 O 的距离成正比，$\boldsymbol{F}$ 的方向恒指向原点。此质点由点 $A(a,0)$ 沿椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 按逆时针方向移动到点 $B(0,b)$，求力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W。

解 椭圆的参数方程为 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$，t 从 0 变到$\frac{\pi}{2}$。

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{F}=k\cdot|\boldsymbol{r}|\cdot\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\right)=-k(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$$

其中，$k>0$ 是比例常数。于是

$$\begin{aligned}W&=\int_{\overset{\frown}{AB}}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{\overset{\frown}{AB}}-kx\,dx-ky\,dy=-k\int_{\overset{\frown}{AB}}x\,dx+y\,dy\\&=-k\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-a^2\cos t\sin t+b^2\sin t\cos t)\,dt\\&=k(a^2-b^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt=\frac{k}{2}(a^2-b^2)\end{aligned}$$

7.5.3 两类曲线积分之间的联系

设有向曲线弧 L：$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$的起点 A 和终点 B 分别对应参数 a，b，不妨设 $a<b$（也可设 $a>b$，此时令 $s=-t$，A 和 B 分别对应参数 $s=-a$ 和 $s=-b$，将下面的讨论针对参数 s

进行亦可)，并设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 L 上连续，$\varphi(t)$，$\psi(t)$ 在 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$。我们知道，向量 $\boldsymbol{T}=(\varphi'(t),\psi'(t))$ 是曲线弧 L 在点 $M(\varphi(t),\psi(t))$ 处的一个切向量，它的指向与参数 t 的增长方向一致。当 $a<b$ 时，这个指向就是有向曲线弧 L 的方向。于是，有向曲线弧 L 的切向量 $\boldsymbol{T}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}},\quad \cos\beta=\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$$

由对弧长曲线积分的计算公式(7-4-1)得

$$\begin{aligned}&\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s\\&=\int_a^b\left\{P[\varphi(t),\psi(t)]\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}+Q[\varphi(t),\psi(t)]\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\right\}\\&\quad\times\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t\\&=\int_a^b\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t\\&=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

因此，平面曲线 L 上的两类曲线积分之间有如下联系：

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\mathrm{d}s \tag{7-5-4}$$

其中，$\alpha(x,y)$，$\beta(x,y)$ 为有向曲线弧 L 在点 (x,y) 处的切向量的方向角。

类似地，空间曲线 Γ 上的两类曲线积分之间有如下联系：

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s \tag{7-5-5}$$

其中，$\alpha(x,y,z)$，$\beta(x,y,z)$，$\gamma(x,y,z)$ 为有向曲线弧 Γ 在点 (x,y,z) 处的切向量的方向角。

习题 7-5

1. 计算下列对坐标的曲线积分。

(1) $\int_L y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，其中，$L$ 为点 $(a,0)$ 沿上半圆周 $x^2+y^2=a^2$ 到点 $(-a,0)$ 的一段弧。

(2) $\int_L xy\mathrm{d}x$，其中，L 为抛物线 $y^2=x$ 上从点 $A(1,-1)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段弧。

(3) $\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中，$L$ 为圆周 $x^2+y^2=a^2$(按逆时针方向绕行)。

(4) 计算 $\int_\Gamma x^3\mathrm{d}x+3zy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}z$，其中，$\Gamma$ 是从点 $A(3,2,1)$ 到点 $O(0,0,0)$ 的直线段 AO。

(5) $\oint_{\Gamma}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z$，其中，$\Gamma$ 为有向闭折线 $ABCA$，A，B，C 三点坐标为 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$。

2. 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 转换为对弧长的曲线积分，其中，L 分别为如下曲线。

(1) 在 xOy 面内沿直线从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$；

(2) 在 xOy 面内沿抛物线 $y=x^2$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$。

*7.6 格林公式及其应用

7.6.1 格林公式

在一元函数积分学中，牛顿—莱布尼茨公式 $\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$ 表示：$F'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分可以通过它的原函数 $F(x)$ 在这个区间端点上的值来表达。下面介绍另一个重要公式——格林公式，它告诉我们，平面闭区域 D 上的二重积分可以通过沿闭区域 D 的边界曲线 L 上的曲线积分来表达。

首先介绍平面单连通区域的概念。设 D 为平面区域，如果 D 内任一闭曲线所围的部分都属于 D，则称 D 为平面**单连通区域**，否则称为**复连通区域**。通俗地说，平面单连通区域就是不含有“洞”（包括点“洞”）的区域，复连通区域就是含有“洞”（包括点“洞”）的区域。例如，平面上圆形区域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2<4\}$、左半平面 $\{(x,y)\mid x<0\}$ 等都是单连通区域，圆环形区域 $\{(x,y)\mid 4<x^2+y^2<9\}$、$\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\leqslant 1\}$ 等都是复连通区域。

对平面区域 D 的边界曲线 L，我们规定 L 的正向如下：当观察者沿 L 的这个方向行走时，D 内在它近处的那一部分总在它的左边。例如，D 是由边界曲线 L、l_1 和 l_2 围成的复连通区域（见图 7-6-1），作为 D 的正向边界，L 的正向是逆时针方向，而 l_1 和 l_2 的正向则是顺时针方向。

定理 7-6-1（格林定理） 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \tag{7-6-1}$$

其中，L 是 D 的取正向的边界曲线。公式(7-6-1)称为格林公式。

证明 仅就 D 既是 X 型区域的又是 Y 型区域情形进行证明。如图 7-6-2 所示，作为 X 型区域，D 可表示为：$a\leqslant x\leqslant b$，$\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$。因为 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 连续，所以由二重积分的计算法有

$$\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x=\int_a^b\{P[x,\varphi_2(x)]-P[x,\varphi_1(x)]\}\mathrm{d}x$$

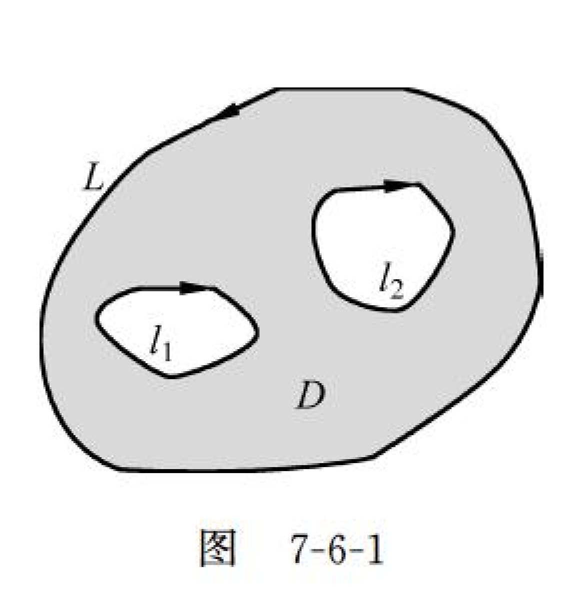


图　7-6-1

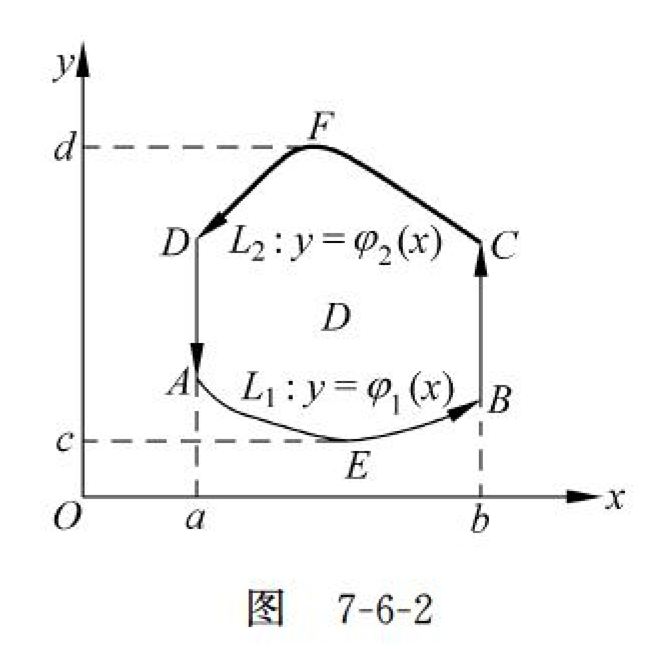


图　7-6-2

另一方面，由对坐标的曲线积分的性质及计算方法有

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x=\int_{L_1}P\mathrm{d}x+\int_{BC}P\,\mathrm{d}x+\int_{L_2}P\mathrm{d}x+\int_{DA}P\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{L_1}P\mathrm{d}x+\int_{L_2}P\mathrm{d}x=\int_a^b P[x,\varphi_1(x)]\mathrm{d}x+\int_b^a P[x,\varphi_2(x)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\{P[x,\varphi_1(x)]-P[x,\varphi_2(x)]\}\mathrm{d}x$$

故

$$-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\,\mathrm{d}x \tag{7-6-2}$$

又由于 D 是 Y 型区域(图 7-6-2)，设有向曲线弧 $\widehat{FDAE}$ 为 $L_1':x=\psi_1(y)$，有向曲线弧 $\widehat{EBCF}$ 为 $L_2':x=\psi_2(y)$，则 D 可表示为：$c\leqslant y\leqslant d$，$\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)$。于是得

$$\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_c^d\{Q[\psi_2(y),y]-Q[\psi_1(y),y]\}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{L_2'}Q\mathrm{d}y+\int_{L_1'}Q\mathrm{d}y=\oint_L Q\mathrm{d}y \tag{7-6-3}$$

由于 D 既是 X 型区域的又是 Y 型区域的，所以式(7-6-2)和式(7-6-3)同时成立，两式合并即得公式(7-6-1)。至于 D 为一般情形的区域，只要在 D 内引进一条或几条辅助曲线就可以把 D 分成有限个闭区域，使得每个闭区域都既是 X 型区域的又是 Y 型区域的，再稍加讨论即可，请读者自己补充完整。证毕。

注：对复连通区域 D，格林公式右端应包括沿区域 D 的全部边界的曲线积分，且边界的方向对区域 D 来说都是正向的。

下面说明格林公式的一个简单应用。设区域 D 的边界曲线为 L，取 $P=-y$，$Q=x$，则由格林公式得

$$2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L x\,\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

从而区域 D 的面积为

$$A=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\oint_L x\,\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x \tag{7-6-4}$$

类似地，有 $$A=\oint_L x\mathrm{d}y \quad 或 \quad A=-\oint_L y\mathrm{d}x$$

例 7-6-1 求椭圆 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$ 所围成图形的面积 A。

解 由公式(7-6-4)得

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2\theta+ab\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\pi ab$$

例 7-6-2 计算$\oint_L xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x$，其中，$L$ 为正向圆周 $x^2+y^2=R^2$。

解 设 L 所围成的区域为 D，这里 $P=-x^2y, Q=xy^2$，于是$\frac{\partial Q}{\partial x}=y^2, \frac{\partial P}{\partial y}=-x^2$，在 D 上应用格林公式得

$$\oint_L xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x=\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}R^4$$

例 7-6-3 设 L 是任意一条分段光滑的闭合曲线，证明

$$\oint_L 2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0$$

证明 设 L 所围成的区域为 D，这里 $P=2xy, Q=x^2$，则$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2x=0$，因此在 D 上应用格林公式得

$$\oint_L 2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\pm\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

证毕。

例 7-6-4 计算$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中，$L$ 为一条无重点、分段光滑且不经过原点的连续闭合曲线，L 的方向为逆时针方向。

解 记 L 所围成的闭区域为 D，令 $P=\frac{-y}{x^2+y^2}, Q=\frac{x}{x^2+y^2}$，则当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

当$(0,0)\notin D$ 时，在 D 上应用格林公式得

$$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=0$$

当$(0,0)\in D$ 时，在 D 内取一圆周 $l: x^2+y^2=r^2(r>0)$，其中 l 的方向取逆时针方向。在由 L 及 l 围成了一个复连通区域 D_1(图 7-6-3)上应用格林公式得

$$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}-\oint_l\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=0$$

故

$$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_l\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}\mathrm{d}\theta=2\pi$$

7.6.2　平面上曲线积分与路径无关的条件及二元函数的全微分求积

在许多物理问题中，常遇到保守力场，即场力对物体所做的功与物体移动的路径无关，而仅与物体的起始位置与终止位置有关。这个问题反映在数学上就是曲线积分与路径无关。设 G 是一个开区域，$P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 G 上具有一阶连续偏导数。如果对于 G 内任意指定的两个点 A，B 以及 G 内从点 A 到点 B 的任意两条曲线 L_1，L_2（见图 7-6-4），等式

$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

恒成立，就说曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关，否则便是与路径有关。

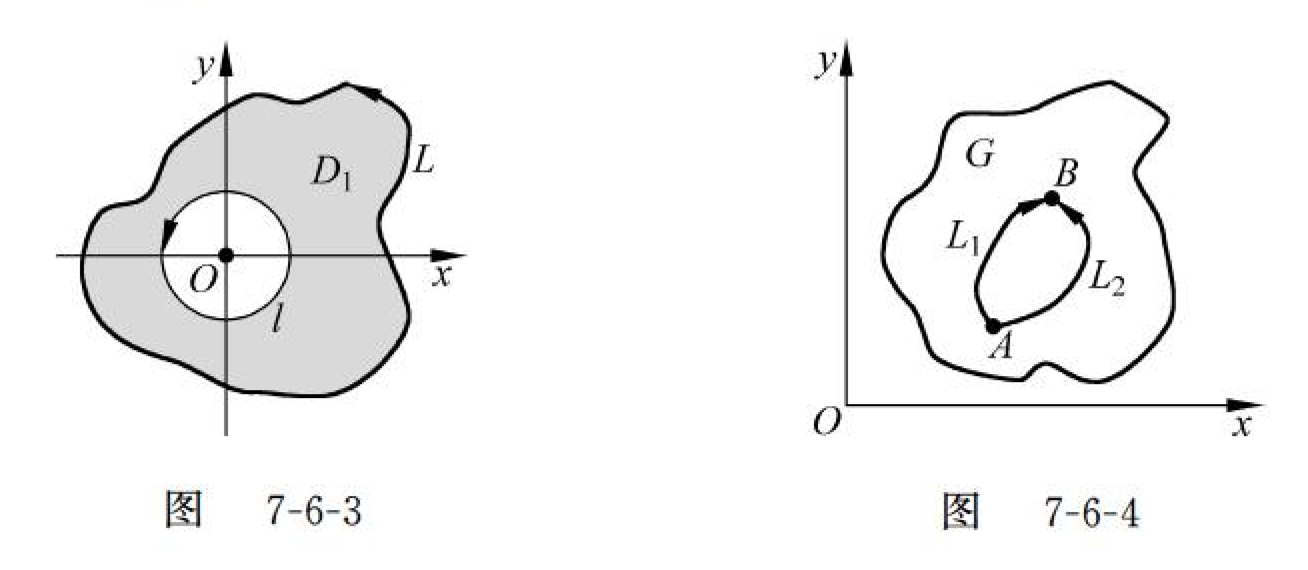


图　7-6-3　　　　图　7-6-4

设曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关，L_1 和 L_2 是 G 内任意两条从点 A 到点 B 的曲线，则有

$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\int_{L_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{L_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$$

$$\Leftrightarrow \oint_{L_1+L_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$$

其中，$L_1+L_2^-$ 是一条有向闭合曲线。因此得出结论：曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关相当于沿 G 内任意闭合曲线 C 的曲线积分 $\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$。

读者可能也注意到二元函数 $u(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}u=u'_x\mathrm{d}x+u'_y\mathrm{d}y$。表达式 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与函数的全微分有相同的结构，但它未必就是某个函数的全微分。那么在什么条件下表达式 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分呢？当这样的二元函数存在时怎样求出这个二元函数呢？

定理 7-6-2　设 G 是一个单连通区域，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 G 上具有一阶连续

偏导数，则下列四个条件互相等价：

(1) 沿 G 内任意分段光滑闭合曲线 C 有 $\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$；

(2) 沿 G 内任意分段光滑曲线 L，$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与路径无关，只与 L 的起点和终点有关；

(3) $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 是 G 内某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，即在 G 内有 $\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$；

(4) 在 G 内恒有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$。

证明 (1)⇒(2)：显然。

(2)⇒(3)：设 $M_0(x_0, y_0)$ 为 G 内某一定点，$M(x,y)$ 为 G 内动点，考虑如下函数：

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y \tag{7-6-5}$$

因为曲线积分与路径无关，于是可以选用平行于坐标轴的特殊路径(见图 7-6-5)来计算$u(x,y)$。

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y + \int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

图 7-6-5

所以，$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y + \dfrac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x = P(x,y)$

类似地有$\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$，从而 $\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$，即 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 是函数 $u(x,y)$ 的全微分。

(3)⇒(4)：由 $\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 得$\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$，$\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$，于是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

(4)⇒(1)：若$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$，则$\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$，由格林公式，对任意闭曲线 C，有

$$\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

证毕。

注：定理 7-6-2 要求区域 G 是单连通区域，且函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 G 上具有一阶连续偏导数。如果这两个条件之一不能满足，那么定理的结论不能保证成立。

例 7-6-5 计算 $\int_L 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$，其中，$L$ 为抛物线 $y = x^2$ 上从 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧。

解 这里 $P = 2xy$，$Q = x^2$，因为$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x$ 在整个 xOy 面内都成立，所以在整个 xOy 面内，积分$\int_L 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$ 与路径无关。于是由图 7-6-6 可得

$$\int_L 2xy\,dx + x^2\,dy = \int_{OA} 2xy\,dx + x^2\,dy + \int_{AB} 2xy\,dx + x^2\,dy = \int_0^1 1^2\,dy = 1$$

例 7-6-6　验证$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$在右半平面($x>0$)内是某个函数的全微分，并求出一个这样的函数。

解　这里 $P=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q=\frac{x}{x^2+y^2}$，因为在右半平面内恒有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以在右半平面内，$\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$是某个函数的全微分。取积分路线为从 $A(1,0)$到 $B(x,0)$再到 $C(x,y)$的折线(见图 7-6-7)，则由公式(7-6-5)得所求函数为

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} \\ &= \int_{AB} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} + \int_{BC} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} \\ &= 0 + \int_0^y \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = \left[\arctan\frac{y}{x}\right]_0^y = \arctan\frac{y}{x} \end{aligned}$$

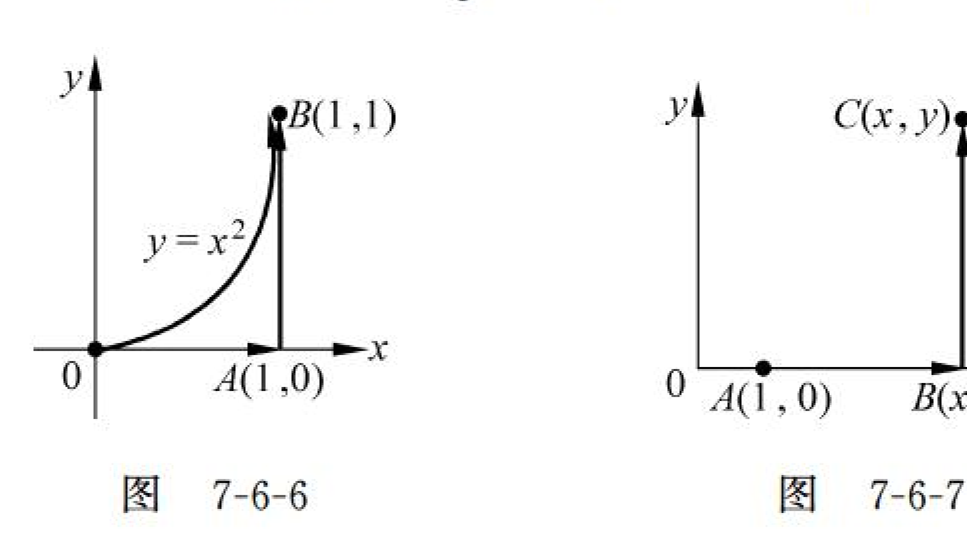


图　7-6-6　　　　图　7-6-7

注：例 7-6-6 如果在整个平面内来讨论，将不成立。读者可以思考一下为什么(x_0, y_0)不取(0,0)。

习题 7-6

1. 利用曲线积分计算星形线 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$ 所围图形的面积。

*2. 利用格林公式计算下列曲线积分。

(1)$\oint_L (e^{2x}-y+6)\,dx+(\arcsin y+3x-4)\,dy$，其中，$L$ 为三顶点分别为(0,0)，(3,0)和(1,2)的三角形正向边界；

(2)$\oint_L \left(\frac{y^3}{3}+3y+x\right)dx+(e^y+xy^2+2x)\,dy$，其中，$L$ 为正向椭圆周$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；

(3)$\oint_L (x^2 y\cos x+2xy\sin x-y^2 e^x)\,dx+(x^2\sin x-2ye^x)\,dy$，其中，$L$ 为正向星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$；

(4)$\int_L (e^x\sin y-my)\,dx+(e^x\cos y-m)\,dy$，其中，$m$ 为常数；L 为点 $A(a,0)$沿上半圆

周 $x^2+y^2=ax$ 到点 $O(0,0)$ 的一段弧。

3. 验证下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关，并计算积分值。

(1) $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$；

(2) $\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y$；

(3) $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y$；

(4) $\int_{(2,1)}^{(1,2)}\varphi(x)\mathrm{d}x+\psi(y)\mathrm{d}y$，其中，$\varphi(x)$，$\psi(y)$ 具有一阶连续偏导数。

4. 验证下列 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求出一个这样的函数 $u(x,y)$。

(1) $(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$；

(2) $xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y$；

(3) $2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$；

(4) $(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$。

5. 设有一变力在坐标轴上的投影为 $X=x+y^2$，$Y=2xy-8$，该力确定了一个力场，证明质点在此场内移动时，场力所做的功与路径无关。

第8章

无穷级数

无穷级数是高等数学的重要组成部分，它是表示函数、研究函数性质以及进行数值计算的一种重要的数学工具，在电学、力学及计算机辅助设计等方面有着广泛的应用。本章首先介绍无穷级数的概念和性质，然后重点讨论常数项级数敛散性的判别法，在此基础上介绍函数项级数的有关内容，并由此得出幂级数的一些最基本的结论和初等函数的幂级数展开。

8.1 常数项无穷级数的概念和性质

8.1.1 无穷级数的概念

在初等数学中遇到的都是求有限项之和的问题，但在某些实际问题中需要求无穷多项之和。

例如分数$\frac{1}{3}$，写成循环小数为$0.\dot{3}$。

$$0.\dot{3}=0.3+0.03+0.003+\cdots=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots$$

定义 8-1-1 设有数列 $u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n,\cdots$，则式子

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \quad 或 \quad \sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

称为**数项级数**或**无穷级数**，简称为**级数**。其中 $u_1,u_2,u_3,\cdots$称为级数的**项**，u_n 称为**一般项**或**通项**。当级数的各项均为常数时，此级数称为**常数项级数**。

需要指出的是，作为级数定义的和式，实质上是一个形式和，因为无法实现无穷多个数相加。那么应如何理解无穷级数中无穷多个数相加呢？

定义 8-1-2 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 n 项之和为 S_n，即

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$$

称 S_n 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和。当 $n=1,2,3,\cdots$时，则得到一个部分和数列

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, \cdots, S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n, \cdots$$

数列$\{S_n\}$称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列。

定义 8-1-3 若部分和数列$\{S_n\}$的极限存在，即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，并称极限值 S 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和，记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$；若部分和数列$\{S_n\}$的极限不存在，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，发散级数没有和。

定义 8-1-4 当级数收敛时，级数的和 S 与其前 n 项部分和 S_n 之差，称为级数的**余项**，记作 r_n，即

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = \lim_{n\to\infty} S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$$

所以收敛级数的余项必须收敛于零。

例 8-1-1 讨论等比级数(也称几何级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots, \quad a \neq 0$$

的敛散性，其中 $a\neq 0$。

解 如果 $q\neq 1$，则等比级数的前 n 项和为

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

当$|q|<1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，所以

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$$

此时级数收敛，且其和为 $S=\dfrac{a}{1-q}$。

当$|q|>1$ 时，由于$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$，所以，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

此时级数发散。

如果$|q|=1$，则可分两种情况讨论。

(1) 当 $q=1$ 时，级数变为

$$a + a + \cdots + a + \cdots$$

则 $S_n = na$，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$，此时级数发散。

(2) 当 $q=-1$ 时，级数变为

$$a - a + a - a + \cdots$$

则
$$S_n=\begin{cases}0 & n\text{ 为偶数}\\ a & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

所以部分和数列$\{S_n\}$的极限不存在，此时级数发散。

综上可知，当$|q|<1$时，等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$收敛，且和$S=\frac{a}{1-q}$；当$|q|\geqslant 1$时，等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$发散。

例 8-1-2　判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$的敛散性。

解　由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$是等比级数，公比为$q=\frac{1}{3}$，即$|q|<1$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$收敛。

例 8-1-3　判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$的敛散性。

解　由于$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，且
$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

而
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

所以级数收敛，其和为$S=1$。

例 8-1-4　证明调和级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$是发散的。

证明　先证明不等式$x\geqslant\ln(1+x)(x\geqslant 0)$成立。

设$f(x)=x-\ln(1+x)$，$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0(x\geqslant 0)$，由此可知$f(x)$在$[0,+\infty)$为增函数；又$f(0)=0$，当$x\geqslant 0$时，$f(x)\geqslant f(0)=0$，即$x-\ln(1+x)\geqslant 0$，也即$x\geqslant\ln(x+1)$。

令$x=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n}$代入上式得
$$1\geqslant\ln(1+1)=\ln 2$$
$$\frac{1}{2}\geqslant\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{3}{2}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{n}\geqslant\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{n+1}{n}$$

相加得
$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\geqslant\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)$$

当$n\to+\infty$时，$\ln(n+1)\to+\infty$，所以$S_n\to+\infty$，故调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散。

证毕。

8.1.2 数项级数的性质

根据无穷级数敛散性的概念及有关极限运算法则，很容易得出级数的下列性质。

性质 8-1-1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，其和为 S，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，其和为 kS。

证明 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 的部分和分别为 S_n 与 σ_n，则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sigma_n &= \lim_{n\to\infty}(ku_1+ku_2+\cdots+ku_n) = k\lim_{n\to\infty}(u_1+u_2+\cdots+u_n)\\ &= k\lim_{n\to\infty}S_n = kS\end{aligned}$$

这表明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛，且和为 kS。证毕。

性质 8-1-2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 S_1 和 S_2，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，且其和为 $S_1 \pm S_2$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = S_1 \pm S_2$$

证明 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 的部分和分别为 S_n, σ_n, τ_n，则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\tau_n &= \lim_{n\to\infty}[(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)]\\ &= \lim_{n\to\infty}[(u_1+u_2+\cdots+u_n)\pm(v_1+v_2+\cdots+v_n)]\\ &= \lim_{n\to\infty}(S_n\pm\sigma_n) = S_1\pm S_2\end{aligned}$$

证毕。

性质 8-1-3 在一个级数中去掉或添加有限项，不改变级数的敛散性，但一般会改变收敛级数的和。

例如，级数 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 是收敛的，级数 $10000+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 是收敛的，级数 $\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 也是收敛的。

证明 略。

性质 8-1-4 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则对该级数的项任意加括号后所成的级数仍收敛，且其和不变。

证明 略。

注意：原级数收敛，加括号后所成的新级数也收敛；但反之不然，即如果加括号后所成的级数收敛，原级数未必收敛。例如，级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

收敛于零，但级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

却是发散的。

性质 8-1-5(级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则它的一般项 u_n 趋于零,即 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。

证明 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 S_n,由于 $u_n = S_n - S_{n-1}$,因此,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

证毕。

由此性质可以得到判断级数发散的一种方法:若级数的一般项 u_n 不趋于零,即 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$,则该级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定发散。

例如,对于级数 $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\cdots+\frac{n}{2n+1}+\cdots$,由于 $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$,因此,这个级数是发散的。

习题 8-1

1. 写出下列级数的通项。

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$ (2) $\frac{3}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{6}{2^4}+\cdots$

(3) $0.9+0.99+0.999+0.9999+\cdots$ (4) $\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\cdots$

2. 写出下列级数的部分和,并说明其敛散性。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

3. 判断下列级数的敛散性。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{4n+2}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{4^n}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln 2)^n$ (5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{2n+3}$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+4^n}{8^n}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{4n+1}$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$

8.2 数项级数敛散性的判别法

在一般情况下,利用级数的定义和性质来判断级数的敛散性通常难度较大,也有一定的局限性,因此在本节中介绍一些简单可行的判断级数敛散性的方法。

8.2.1 正项级数的审敛法

定义 8-2-1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 中的各项均非负，即 $u_n\geqslant 0(n=1,2,3,\cdots)$，则称该级数为**正项级数**。

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和为 S_n，由于 $S_{n+1}=S_n+u_{n+1}\geqslant S_n$；又由于 $u_n\geqslant 0$，则 $S_n\geqslant 0$。所以正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调增加数列，且有下界。

若部分和数列有上界，则由单调有界数列必有极限的性质知，部分和数列 $\{S_n\}$ 必有极限，此时级数收敛；反之，若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于 S，那么根据收敛数列必有界的性质可知，部分和数列 $\{S_n\}$ 有界，且一定有上界，从而得到正项级数收敛的充要条件。

定理 8-2-1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界。

例 8-2-1 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$ 的敛散性。

解 由于 $\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}$，且

$$S_n=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}<1$$

因此级数的部分和有上界，所以该级数收敛。

例 8-2-2 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性(用正项级数收敛的充要条件)。

解 由于 $u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，且

$$\begin{aligned}S_n&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}<1\end{aligned}$$

因此级数的部分和有上界，所以该级数收敛。

这两个例子说明，对于正项级数敛散性的判断可由级数间的比较来解决，因此而产生了级数的比较审敛法。

定理 8-2-2(比较审敛法) 设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，且 $u_n\leqslant v_n(n=1,2,3,\cdots)$，(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 也发散。

证明 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的部分和分别为 S_n 与 σ_n，由于 $u_n\leqslant v_n(n=1,2,3,\cdots)$，所以

$$S_n \leqslant \sigma_n, \quad n=1,2,3,\cdots$$

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,则由定理 8-2-1 知,σ_n 有上界,即 $\sigma_n \leqslant M$,从而 $S_n \leqslant M$,即 S_n 有上界;再由定理 8-2-1 知,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛。

(2) 用反证法:若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 必发散。因为如果 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,由(1)知,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛,与假设矛盾。

证毕。

例 8-2-3　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)3^{n-1}}$ 的敛散性。

解　因为 $u_n=\frac{1}{(2n-1)3^{n-1}}<\frac{1}{3^{n-1}}$,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$ 是一个公比 $q=\frac{1}{3}<1$ 的等比级数,因此它是收敛的。根据比较审敛法可知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)3^{n-1}}$ 收敛。

例 8-2-4　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 的敛散性。

解　因为 $u_n=\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}$,而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的,所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 是发散的。根据比较审敛法可知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 发散。

例 8-2-5　讨论 p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}(p>0)$ 的敛散性。

解　当 $p=1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 就是调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$,故发散。

当 $p<1$ 时,因为 $\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}$,由于调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,根据比较审敛法可知,此时 p-级数发散。

当 $p>1$ 时,通过积分来证明 p-级数的部分和有上界。

$$a_n=\frac{1}{n^p}=\int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^p}\mathrm{d}x$$

由于积分变量 x 的变化范围是 $n-1\leqslant x\leqslant n$,从而 $\frac{1}{n^p}\leqslant\frac{1}{x^p}$,因此

$$\begin{aligned}
S_n &= 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}=1+\int_1^2 \frac{1}{2^p}\mathrm{d}x+\int_2^3 \frac{1}{3^p}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^p}\mathrm{d}x \\
&\leqslant 1+\int_1^2 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x+\int_2^3 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x \\
&= 1+\int_1^n \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

由于 $$\int_1^n \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)$$

所以 $$S_n \leqslant 1+\int_1^n \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x \leqslant 1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right) < 1+\frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1}$$

根据正项级数收敛的充分必要条件可知，当 $p>1$ 时，p-级数收敛。

综上所述，对于 p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当 $p\leqslant 1$ 时发散；当 $p>1$ 时收敛。

例 8-2-6 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+2}$ 的敛散性。

解 因为 $u_n=\frac{n}{n^3+2}<\frac{1}{n^2}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是 $p=2>1$ 时的 p- 级数，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的，根据比较审敛法可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+2}$ 收敛。

为了使用上的方便，下面给出比较审敛法的极限形式。

定理 8-2-3（比较审敛法的极限形式） 设有两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l,\quad 0<l<\infty$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同时收敛或同时发散。

证明 由于 $0<l<\infty$，于是存在常数 p,q，使得

$$0<p<l<q$$

又由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l(0<l<\infty)$ 知，从某一个 $n=N$ 开始有不等式

$$p<\frac{u_n}{v_n}<q$$

即 $$pv_n<u_n<qv_n,\quad n\geqslant N$$

（1）如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}qv_n$ 也收敛，根据比较审敛法可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

（2）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}pv_n$ 也发散，根据比较审敛法可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

证毕。

例 8-2-7 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\frac{1}{n^2}$ 的敛散性。

解 因为 $u_n=\tan\frac{1}{n^2}>0$，所以这是一个正项级数。取 $v_n=\frac{1}{n^2}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{\tan\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=1$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是一个 $p=2>1$ 时的 p-级数，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的。根据比较审敛法的极限形式可知，原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\tan\frac{1}{n^2}$ 收敛。

例 8-2-8　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}}$ 的敛散性。

解　$u_n=\frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}}$，取 $v_n=\frac{1}{n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{\frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}}}{\frac{1}{n}}=1$$

由于调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的，根据比较审敛法的极限形式可知，原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}}$ 发散。

比较判别法在实际运用中需要找一个已知敛散性的级数与给定的级数进行对比，这一点不是很容易做到的。下面给出比值审敛法。它在处理通项中出现 a^n，$n!$ 等形式的级数时非常方便。

定理 8-2-4（达朗贝尔比值审敛法）　设有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$ 存在，则

（1）当 $\rho<1$ 时，级数收敛；

（2）当 $\rho>1\left(\text{或}\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty\right)$时，级数发散；

（3）当 $\rho=1$ 时，级数可能收敛也可能发散。

例 8-2-9　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ 的敛散性。

解　$u_n=\frac{3^n}{n!}$，$u_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0<1$$

根据比值审敛法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ 收敛。

例 8-2-10　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ 的敛散性。

解　$u_n=\frac{n^n}{n!}$，$u_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}>1$$

根据比值审敛法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ 发散。

例 8-2-11 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+3)}$ 的敛散性。

解 $u_n=\frac{n+1}{n(n+3)}$，$u_{n+1}=\frac{n+2}{(n+1)(n+4)}$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{(n+1)(n+4)}\cdot\frac{n(n+3)}{n+1}=1$$

这时比值审敛法失效，必须用其他方法判定。由于

$$u_n=\frac{n+1}{n(n+3)}>\frac{1}{n+3}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$ 只是调和级数去掉前 3 项，由比较审敛法可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+3)}$ 发散。

8.2.2 交错级数及其审敛法

定义 8-2-2 正、负项交替出现的级数，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$$

或

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n=-u_1+u_2-u_3+u_4-\cdots$$

其中，$u_n>0(n=1,2,3,\cdots)$，这样的级数称为**交错级数**。

例如，$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$就是一个交错级数。

关于交错级数有如下审敛法。

定理 8-2-5（莱布尼茨审敛法） 如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0;n=1,2,3,\cdots)$ 满足下列条件：

(1) $u_n\geqslant u_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$；

(2) $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，

则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，并且其和 S 满足 $0\leqslant S\leqslant u_1$。

例 8-2-12 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 的敛散性。

解 此交错级数 $u_n=\frac{1}{n}$，$u_{n+1}=\frac{1}{n+1}$，显然 $u_n>u_{n+1}$，又 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，由莱布尼茨判别法知，该级数收敛。

例 8-2-13 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+2}$ 的敛散性。

解 此交错级数 $u_n=\frac{n}{n+2}$，$u_{n+1}=\frac{n+1}{n+3}$，由

$$u_n - u_{n+1} = \frac{n}{n+2} - \frac{n+1}{n+3} = \frac{-2}{(n+2)(n+3)} < 0$$

可知 $u_n < u_{n+1}$，即此交错级数不满足莱布尼茨审敛法的条件，故不能用莱布尼茨审敛法判别敛散性，应改用其他方法。

又由于 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ 知，该级数发散。

8.2.3 绝对收敛和条件收敛

定义 8-2-3 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，若其通项 $u_n(n=1,2,3,\cdots)$ 为任意实数，则称其为**任意项级数**。

判断任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性，通常先对级数的各项取绝对值，将其转换成正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 来考察。

定义 8-2-4 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛。

例 8-2-14 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{n^n}$ 是绝对收敛还是条件收敛。

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{n!}{n^n} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$$

由比值审敛法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 是收敛的，所以原级数是绝对收敛。

例 8-2-15 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 是绝对收敛还是条件收敛。

解
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

考虑到 $\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} (n=2,3,\cdots)$，因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ 是一个 $p=\frac{1}{2}<1$ 时的 p-级数，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ 发散，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)$ 也发散。

根据正项级数的比较判别法可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 发散，因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 不绝对收敛。

又由于 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 是一个交错级数，满足：

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\frac{1}{\sqrt{n+2}}=u_{n+1}$$

且
$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 收敛。

从而可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 是条件收敛。

习题 8-2

1. 利用比较法判别下列级数的敛散性。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+2}}$　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+1}{3^n}$　(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-2}$　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{3^n}$

2. 利用比值法判别下列级数的敛散性。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+2}$　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2n+1)!}$　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 3^n}$　(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!10^n}{(n+1)!}$

3. 判断下列交错级数的敛散性。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^2}{n^2+1}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n+5}}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3n+1}{n^2}$

4. 判断下列级数的敛散性。若收敛，是绝对收敛还是条件收敛。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\sqrt{n}}$　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n^2}{n!}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{2n+1}$　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n+3}}$　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+1)^2}$

8.3　幂级数

前面两节讨论的级数都是常数项级数，本节开始讨论函数项级数，主要是幂级数。

8.3.1　函数项级数的概念

定义 8-3-1　设 $u_1(x),u_2(x),u_3(x),\cdots,u_n(x),\cdots$ 是定义在 $I\subseteq \mathbf{R}$ 上的函数，则表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{8-3-1}$$

称为定义在区间 I 上的**函数项级数**，记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$。

例如，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 是一个函数项级数。

当 $x_0\in I$ 时，函数项级数(8-3-1)成为常数项级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)=u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots \tag{8-3-2}$$

如果式(8-3-2)收敛，则称 x_0 为函数项级数(8-3-1)的**收敛点**；如果(8-3-2)发散，则称 x_0 为函数项级数(8-3-1)的**发散点**。函数项级数(8-3-1)全体收敛点的集合称为此函数项级数的**收敛域**；全体发散点的集合称为它的**发散域**。

显然，对于收敛域内每一点 x，函数项级数都有确定的和与 x 对应，这个和是 x 的函数，记作 $S(x)$，称为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**和函数**，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x),\quad x\in D$$

8.3.2　幂级数的审敛准则

下面讨论一类简单而常见的函数项级数，即幂级数。

定义 8-3-2　形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{8-3-3}$$

或

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+a_n(x-x_0)^n+\cdots \tag{8-3-4}$$

的函数项级数称为**幂级数**，其中 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 是常数，称为**幂级数的系数**。

下面重点讨论幂级数(8-3-3)的收敛域。

例 8-3-1 讨论幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 的敛散性。

解 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ 是公比 $q = x$ 的等比级数，故当 $|x| < 1$ 时幂级数收敛于和$\dfrac{1}{1-x}$；当 $|x| \geqslant 1$ 时级数发散。因此，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ 的收敛域为$(-1,1)$。

若存在一个正数 R，当$|x|<R$ 时幂级数收敛，而$|x|>R$ 时幂级数发散，当 $x=R$ 与 $x=-R$ 时，幂级数可能收敛也可能发散，则称 R 为幂级数的**收敛半径**。定理 8-3-1 给出了求收敛半径的一种方法。

定理 8-3-1 设有幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，其中 $a_n \neq 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则：

（1）当 $0<\rho<+\infty$时，$R=\dfrac{1}{\rho}$；

（2）当 $\rho=0$ 时，$R=+\infty$；

（3）当 $\rho=+\infty$时，$R=0$。

对 $x=\pm R$ 点，幂级数可能收敛也可能发散。此时，要分别对 $x=R$ 和 $x=-R$ 时的情况对幂级数进行讨论。

例 8-3-2 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ 的收敛半径与收敛域。

解 因为

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = 1$$

故幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ 的收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}=1$。

当 $x=-1$ 时，幂级数成为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$，是收敛的。

当 $x=1$ 时，幂级数成为调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$，是发散的。

所以幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ 的收敛域为$[-1,1)$。

例 8-3-3 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ 的收敛半径与收敛域。

解 因为 $a_n = \dfrac{1}{n!}$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

故幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ 的收敛半径 $R=+\infty$。

这时幂级数对任何实数 x 都收敛，所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域为$(-\infty,+\infty)$。

例 8-3-4 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}n^n x^n$ 的收敛半径与收敛域。

解 因为 $a_n=n^n$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\infty$$

故幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}n^n x^n$ 的收敛半径 $R=0$。所以幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}n^n x^n$ 仅在 $x=0$ 点收敛。

例 8-3-5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{4^n n^2}$ 的收敛半径与收敛域。

解 这个幂级数中缺少偶次幂的项，即

$$a_{2n}=0,\quad n=1,2,3,\cdots$$

不能直接用定理 8-3-1 求 R。此时可直接用达朗贝尔比值审敛法来求收敛半径。

由于
$$u_n=\frac{1}{4^n n^2}x^{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{4^{n+1}(n+1)^2}x^{2n+3}}{\frac{1}{4^n n^2}x^{2n+1}}\right|=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2|x|^2=\frac{1}{4}|x|^2$$

所以，当$\frac{1}{4}|x|^2<1$ 时，即$|x|<2$ 时，所求幂级数收敛；当$\frac{1}{4}|x|^2>1$ 时，即$|x|>2$ 时，所求幂级数发散。故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{4^n n^2}$ 的收敛半径 $R=2$。

当 $x=-2$ 时，幂级数成为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n^2}=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，是收敛的。

当 $x=2$ 时，幂级数成为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$，是收敛的。

所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{4^n n^2}$ 的收敛域为$[-2,2]$。

8.3.3 幂级数的性质

幂级数及其和函数在其收敛区间内有以下性质。

性质 8-3-1 设两个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 分别在$(-R_1,R_1)$，$(-R_2,R_2)$内收敛，设它们的和函数分别为 $S_1(x)$，$S_2(x)$，记 $R=\min\{R_1,R_2\}$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n=S_1(x)\pm S_2(x)$$

此时所得的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 的收敛半径是 R。

性质 8-3-2 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内是连续的。

性质 8-3-3 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则和函数 $S(x)$ 对 $(-R,R)$ 内的任一点 x 均是可导的，且有

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^{n-1}$$

即幂级数可以逐项求导，且求导后所得的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径 R，但在收敛区间端点处的收敛性可能改变。

既然逐项求导后所得的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径，它在收敛区间内可再次求导，由此可见，幂级数的和函数在收敛区间内任意阶可导，且各阶导数可通过对此幂级数逐项反复求导获得。

性质 8-3-4 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则和函数 $S(x)$ 对 $(-R,R)$ 内的任一点 x 均是可积的，且有

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x = \int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

即幂级数可以逐项积分，且积分后所得的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径 R，但在收敛区间端点处的收敛性可能改变。

由以上性质可见，幂级数在收敛区间 $(-R,R)$ 内，可以相加、相减，可以逐项求导，可以逐项积分，这些性质在求幂级数的和函数及把一个函数用幂级数表示时，起着重要的作用。

例 8-3-6 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ 的和函数 $S(x)$。

解 设所给幂级数的和函数为 $S(x)$，即

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

由于

$$\begin{aligned}S'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \\ &= \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1\end{aligned}$$

所以

$$S(x) = \int_0^x S'(x)\mathrm{d}x = \int_0^x\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln(1+x), \quad |x| < 1$$

当 $x=-1$ 时，幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{1}{n+1}$，是发散的。

当 $x=1$ 时，幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$，是收敛的。

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\ln(1+x),\quad x\in(-1,1]$$

例 8-3-7 求 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 的和函数 $S(x)$，其中 $|x|<1$。

解 设所给幂级数的和函数为 $S(x)$，即

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$$

在 $(-1,1)$ 内逐项积分，得

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^x 1\mathrm{d}t+\int_0^x 2t\mathrm{d}t+\int_0^x 3t^2\mathrm{d}t+\cdots+\int_0^x nt^{n-1}\mathrm{d}t+\cdots$$

$$=x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{x}{1-x},\quad |x|<1$$

再求导，得

$$S(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1)$$

习题 8-3

1. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}x^n$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n}x^n$ (5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ (6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)5^n}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}(x-1)^{n-1}$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n}$ (9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+3}$

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}x^n$

2. 求下列幂级数的和函数。

(1) $1-2x+3x^2-4x^3+\cdots$ (2) $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{3}-\frac{x^7}{3}+\cdots$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ $(|x|<1)$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$ $(|x|<1)$

8.4 函数的幂级数展开式

幂级数在收敛域内可以确定一个函数，下面讨论给定一个函数 $f(x)$，可否找到一个幂级数，使其在收敛域内以 $f(x)$ 为和函数的问题。如果这样的幂级数存在，如何求得？这就是把函数展开为幂级数的问题。

例如，等比级数

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots,\quad a\neq 0$$

当 $|q|<1$ 时，其和为 $S=\dfrac{a}{1-q}$。即

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots=\frac{a}{1-q},\quad |q|<1$$

类似地，可以得到如下结论：

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad |x|<1$$

$$\frac{x}{1+x}=x-x^2+x^3-x^4+\cdots+(-1)^{n+1}x^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n,\quad |x|<1$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad |x|<1$$

$$\frac{x}{1-x}=x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}x^n,\quad |x|<1$$

即函数 $\dfrac{1}{1+x},\dfrac{x}{1+x},\dfrac{1}{1-x},\dfrac{x}{1-x}$ 均可表示成幂级数。因此，为了进一步解决把一个给定的函数表示成幂级数的问题，下面介绍泰勒公式。

8.4.1 泰勒公式

定理 8-4-1（泰勒定理） 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有直至 $n+1$ 阶导数，则对此邻域内的任一点 x，有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \qquad (8\text{-}4\text{-}1)$$

其中，$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 位于 x 与 x_0 之间。

式(8-4-1)称为 $f(x)$ 的 **n 阶泰勒公式**，$R_n(x)$ 称为**拉格朗日型余项**。

在泰勒公式中，当 $x_0=0$ 时，则 ξ 位于 0 与 x 之间，记 $\xi=\theta x, 0<\theta<1$，从而泰勒公式变成如下较简单的形式：

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x) \qquad (8\text{-}4\text{-}2)$$

其中，$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, 0<\theta<1$。

式(8-4-2)称为 $f(x)$的**麦克劳林公式**。

8.4.2 泰勒级数

如果函数 $f(x)$在 x_0 的某邻域内具有任意阶导数，而且$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，则级数在收敛域内有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \qquad (8\text{-}4\text{-}3)$$

式(8-4-3)称为 $f(x)$在点 $x=x_0$ 的**泰勒级数**或**泰勒展开式**。

当 $x_0=0$ 时，$f(x)$的泰勒级数可转换为

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \qquad (8\text{-}4\text{-}4)$$

式(8-4-4)称为**麦克劳林级数**或**麦克劳林展开式**。

8.4.3 函数展开成幂级数

把函数 $f(x)$展开成 x 的幂级数有以下两种方法。

1. 直接展开法

直接展开法的步骤如下。

(1) 求出 $f(x)$的各阶导数 $f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$。若在 $x=0$ 处某阶导数不存在，则停止。

(2) 求出函数及其各阶导数在 $x=0$ 处的值 $f(0), f'(0), f''(0), \cdots, f^{(n)}(0)$。

(3) 写出幂级数

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

并求收敛半径 R。

(4) 考察 x 在收敛域内时，余项 $R_n(x)$的极限

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1)$$

是否为零。若为零，则步骤(3)中写出的幂级数就是函数 $f(x)$的幂级数展开式。

例 8-4-1 将函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 展开成 x 的幂级数。

解 因为 $f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x, \quad n=1,2,\cdots$

所以 $$f^{(n)}(0)=e^0=1,\quad n=1,2,\cdots \text{且} f(0)=1$$

可得幂级数

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

其收敛半径 $R=+\infty$。

又余项 $$|R_n(x)|=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}|x|^{n+1}<\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，由比值审敛法可知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛。由级数收敛的必要条件应有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$，而 $e^{|x|}$ 相对于 n 是一常数，于是有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}=0$$

所以 $$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

例 8-4-2 将级数 $f(x)=\sin x$ 展成 x 的幂级数。

解 因为 $$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\quad n=1,2,3,\cdots$$

所以 $$f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=0,f^{(3)}(0)=-1,f^{(4)}(0)=0,\cdots,$$
$$f^{(2n)}(0)=0,f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$$

即 $f^{(n)}(0)$ 循环地取 $0,1,0,-1,\cdots$，于是得幂级数

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

其收敛半径 $R=+\infty$。

当 $n\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}|R_n(x)|&=\frac{\sin\left(\theta x+\frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!}|x|^{n+1}\\&\leqslant\frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}\to 0,\quad x\in(-\infty,+\infty)\end{aligned}$$

所以 $$\begin{aligned}\sin x&=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in(-\infty,+\infty)\end{aligned}$$

2. 间接展开法

用直接展开法将函数展开为幂级数时，由于要讨论 $R_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时极限是否为零

比较困难,因此,可以利用一些已知的函数展开式及幂级数的性质等,将更多的函数间接展开成幂级数。

例 8-4-3 将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 x 的幂级数。

解 因为$(\sin x)'=\cos x$,而

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

所以,在可根据逐项求导的方法,得到幂级数

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

例 8-4-4 将函数 $f(x)=\ln(1+x)$展开成 x 的幂级数。

解 因为

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots,\quad -1<x<1$$

将上式两边从 0 到 x 积分,得幂级数

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

此级数在 $x=1$ 时显然收敛,故收敛域为$(-1,1]$。即

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1},\quad x\in(-1,1]$$

例 8-4-5 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{4-x}$展开为$(x+2)$的幂级数。

解 因为

$$f(x)=\frac{1}{4-x}=\frac{1}{6-(x+2)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x+2}{6}}$$

又由于

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\cdots+t^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}t^n,\quad |t|<1$$

取 $t=\dfrac{x+2}{6}$,得

$$\frac{1}{1-\dfrac{x+2}{6}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+2}{6}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{6^n}$$

且$\left|\frac{x+2}{6}\right|<1$，即$-8<x<4$，所以，

$$f(x)=\frac{1}{4-x}=\frac{1}{6-(x+2)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+2}{6}}=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{6^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{6^{n+1}},\quad x\in(-8,4)$$

例 8-4-6 将函数$f(x)=\sin^2 x$展开成x的幂级数。

解 因为
$$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$$

又由于

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{2n!},\quad t\in(-\infty,+\infty)$$

取$t=2x$，得

$$\cos 2x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

且$-\infty<2x<+\infty$，即$x\in(-\infty,+\infty)$，所以

$$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

*** 例 8-4-7** 用级数展开法近似计算$f(x)=\sqrt[3]{e}$的值（计算前四项）。

解 因为

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

令$x=\frac{1}{3}$，得

$$f(x)=\sqrt[3]{e}=e^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\cdots$$

取前 4 项，得

$$f(x)=\sqrt[3]{e}=e^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{18}+\frac{1}{162}$$

$$\approx 1+0.33333+0.05556+0.00617$$

$$=1.39506$$

习题 8-4

1. 将函数 $f(x)=\frac{1}{1+2x}$展成 x 的幂级数。

2. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x}$展成$(x-3)$的幂级数。

3. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$展成$(x-1)$的幂级数。

4. 将函数 $f(x)=\ln x$ 展成$(x-1)$的幂级数。

5. 将函数 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$展成 x 的幂级数。

6. 将函数 $f(x)=e^x$ 展成$(x-2)$的幂级数。

7. 将函数 $f(x)=a^x$ 展成 x 的幂级数。

8. 将函数 $f(x)=\sin x$ 展成$\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的幂级数。

9. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+5x+6}$展成$(x+1)$的幂级数。

10. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+7x+12}$展成$(x+2)$的幂级数。

11. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$展成$(x+5)$的幂级数。

12. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+9x+20}$展成$(x+3)$的幂级数。

参 考 文 献

[1] 同济大学应用数学系.线性代数[M].4 版.北京：高等教育出版社，2003.
[2] 吴赣昌.线性代数(经济类)[M].北京：中国人民大学出版社，2006.
[3] 戴立辉.线性代数[M].上海：同济大学出版社，2007.
[4] 同济大学数学系.高等数学[M].6 版. 北京：高等教育出版社，2008.
[5] 顾静相.经济数学基础[M].北京：高等教育出版社，2008.
[6] 姚孟臣.高等数学[M].北京：高等教育出版社，2008.
[7] 吴赣昌.高等数学(理工类)[M].北京：中国人民大学出版社，2007.
[8] 郭建英.概率统计[M].北京：北京大学出版社，2005.
[9] 田长生.概率统计与微积分[M].北京：科学出版社，2006.
[10] 李顺初.概率统计教程[M].北京：科学出版社，2009.
[11] 耿玉霞.经济应用数学[M].北京：电子工业出版社，2007.
[12] 陈刚.经济应用数学[M].北京：高等教育出版社，2008.
[13] 谭国律.文科高等数学[M].北京：北京航空航天大学出版社，2009.
[14] 魏权龄.运筹学简明教程[M].北京：中国人民大学出版社，2004.
[15] 石辅天.高等数学(经管类)[M].辽宁：东北大学出版社，2006.
[16] 黄廷祝.线性代数[M]. 北京：高等教育出版社，2009.

附录A

习题答案

习题 1-1

1. (1) A (2) D (3) C
2. $A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$

   $A\cap B=[-10,-5)$

   $A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$

   $A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5)$
3. (1) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ (2) $\{x|x\in\mathbf{R},x\neq0 且 x\neq2\}$ (3) $\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$

   (4) $[-1,0)\cup(0,1]$ (5) $\left\{x|x\in\mathbf{R},x\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-1,k\in\mathbf{Z}\right\}$ (6) $[-1,3]$

   (7) $\{x|2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}\}$ 或 $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}[2k\pi,(2k+1)\pi]$

   (8) $\left\{x|x\in\mathbf{R},x\neq\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$ (9) $(-\infty,-1)\cup(1,3)$ (10) $(1,+\infty)$
4. $\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0$
5. (1) 奇函数 (2) 偶函数 (3) 奇函数 (4) 奇函数 (5) 偶函数 (6) 奇函数

   (7) 非奇非偶函数 (8) 偶函数
6. (1) $y=\sqrt[3]{x+1}$ (2) $y=\frac{x+1}{1-x}$ (3) $y=\frac{1}{2}(e^{x-1}+3)$ (4) $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$
7. (1) $y=\sqrt{u},u=1-x^2$ (2) $y=u^5,u=1+v,v=\lg x$

   (3) $y=u^2,u=\cos v,v=3x-2$ (4) $y=\lg u,u=\arccos v,v=x^3$
8. $2-2x^2$
9. 按照奇偶函数的定义判断,这里从略

习题 1-2

1. (1) 前 5 项从略,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ (2) 前 5 项从略,极限不存在

2. (1) 极限存在，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1000}{n}=0$　(2) 极限存在，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^n}=0$

(3) 极限存在，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n-1}=\frac{3}{2}$　(4) 极限不存在　(5) 极限不存在　(6) 极限不存在

3. 极限不存在

4. (1) C　(2) D

5. (1) 极限存在，$\lim\limits_{x\to+\infty}2^{-x}=0$　(2) 极限不存在　(3) 极限存在，$\lim\limits_{x\to1}\ln x=0$

(4) 极限不存在

6. $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=2$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在

7. $\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在，$\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$

习题 1-3

1. (1) 无穷小　(2) 无穷大　(3) 无穷小　(4) 无穷大　(5) 无穷大　(6) 无穷小

2. (1) 当 $x\to0$ 时为无穷小；当 $x\to\infty$时为无穷大

(2) 当 $x\to-\infty$时为无穷小；当 $x\to+\infty$时为无穷大

(3) 当 $x\to1$ 时为无穷小；当 $x\to0^+$ 或 $x\to+\infty$时为无穷大

(4) 当 $x\to0$ 时为无穷小；当 $x\to2$ 时为无穷大

3. (1) 0　(2) 0　(3) 0　(4) 0

4. 当 $x\to2$ 时，x^2-4x+4 是 $x-2$ 的高阶无穷小

5. 当 $x\to1$ 时，$1-x$ 和 $1-x^3$ 是同阶无穷小，但不是等价无穷小；当 $x\to1$ 时，$1-x$ 和$\frac{1}{2}(1-x^2)$是同阶无穷小，而且还是等价无穷小

习题 1-4

1. (1) 7　(2) 0　(3) 2　(4) $\frac{1}{3}$　(5) $2x$　(6) 1　(7) 3　(8) $\frac{3}{4}$　(9) 0　(10) 2

(11) $\frac{1}{2}$　(12) 2　(13) $\frac{1}{5}$　(14) -1　(15) $\frac{1}{2}$　(16) $\frac{1}{14}$

2. $a=1,b=2$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$

3. $a=4,b=10$

习题 1-5

1. (1) 3　(2) 5　(3) $\frac{2}{5}$　(4) 1　(5) 1　(6) x　(7) e^{-1}　(8) e^2　(9) $e^{-\frac{1}{2}}$

(10) e　(11) e^3　(12) e^{-1}

2. (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^n}{x^m}=\lim\limits_{x\to0}x^{n-m}=\begin{cases}0 & n>m\\1 & n=m\\\infty & n<m\end{cases}$

(2) $\frac{1}{2}$ (3) 2 (4) $\frac{7}{3}$ (5) $-\frac{3}{2}$ (6) 1 (7) $\frac{1}{3}$ (8) 1

习题 1-6

1. 在 $x=\frac{1}{2}$处连续；在 $x=1$ 处不连续；在 $x=2$ 处连续。图像略
2. (1) $x=-2$ 是第二类间断点(无穷间断点)
   (2) $x=1$ 是第一类间断点(可去间断点)，$x=2$ 是第二类间断点(无穷间断点)
   (3) $x=0$ 是第一类间断点(可去间断点)，$x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$是第二类间断点(无穷间断点)
   (4) $x=0$ 是第一类间断点(可去间断点)
   (5) $x=0$ 是第二类间断点(无穷间断点)
   (6) $x=1$ 是第一类间断点(跳跃间断点)
3. (1) 连续区间为$(-\infty,-3)$，$(-3,2)$，$(2,+\infty)$
   $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to-3}f(x)=-\frac{8}{5}$，$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\infty$
   (2) 连续区间为$(-\infty,2)$，$\lim\limits_{x\to-8}f(x)=1$
   (3) 连续区间为$[4,6]$，$\lim\limits_{x\to5}f(x)=2$
4. $a=\mathrm{e}-1$
5. 略
6. 略
7. 略

习题 1-7

1. $R(q)=\begin{cases}130q & 0<q\leqslant700\\91000+117(q-700) & 700<q\leqslant1000\end{cases}$
2. $Q(p)=6000-8p$
3. 市场均衡价格 $p_0=5$
4. $C(q)=180+2q$，固定成本为 $C_0=180$ 元，生产一个玩具的变动成本为 $C_1=2$ 元

习题 2-1

1. $y'|_{x=1}=3$
2. 切线方程为 $x-y-1=0$，法线方程为 $x+y-1=0$
3. 在点$(4,8)$处
4. 略

*5. $f'_{+}(0)=0, f'_{-}(0)=-1, f'(0)$不存在

*6. 在 $x=0$ 处连续且可导

*7. $a=2, b=-1$

习题 2-2

1. (1) $y'=1+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}$　　(2) $y'=x^2e^x(3+x)+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

(3) $y'=e^x(1+\ln x+x\ln x)$　　(4) $y'=\cos 2x$

(5) $y'=x(2\ln x+1)$　　(6) $y'=e^x(\cos x-\sin x)$

(7) $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$　　(8) $y'=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$

2. (1) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$　　(2) $y'=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

(3) $y'=\frac{1}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)}$　　(4) $y'=-\frac{1}{1+x^2}$

(5) $y'=\cot x$　　(6) $y'=-\frac{2}{1+2x}\sin\ln(1+2x)$

(7) $y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$　　(8) $y'=-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}e^{\sqrt{1-\sin x}}$

(9) $y'=\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{3(x-2)}$　　(10) $y'=-\frac{6x}{\sqrt{1-9x^4}}$

3. (1) $y'=-\frac{y+e^x}{x+e^y}$　　(2) $y'=\frac{-y\sin(xy)}{1+x\sin(xy)}$

(3) $y'=\frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$　　(4) $y'=\frac{-e^y}{\cos y+xe^y}$

(5) $y'=\frac{y(e^{xy}-y)-\cos x}{x(2y-e^{xy})}$　　(6) $y'=-\frac{y}{x+e^y}$

4. (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$　　(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{2\ln t}{t(\ln t+1)}$

(3) $\frac{dy}{dx}=\cot\frac{t}{2}$　　(4) $\frac{dy}{dx}=-\tan t$

5. (1) $y''=4e^{2x-1}$　　(2) $y''=-2e^{-x}\cos x$

(3) $y''=-2\sin x-x\cos x$　　(4) $y''=\frac{35}{4}x^{\frac{3}{2}}+6x$

(5) $y''=\frac{-a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$　　(6) $y''=-\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$

(7) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4}{9}e^{3t}$　　(8) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{t^3}$

(9) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-b}{a^2\sin^3 t}$　　(10) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1+t^2}{4t}$

6. (1) $y''=\frac{4\sin y}{(\cos y-2)^3}$　　(2) $y''=\frac{\sin(x+y)}{[\cos(x+y)-1]^3}$

习题 2-3

1. $dy|_{x=1}=0.03, \Delta y=0.0303$
2. (1) $dy=[x^2(3\ln x+1)+e^x(\sin x+\cos x)]dx$

   (2) $dy=e^{\arcsin\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}dx$　　(3) $dy=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx$

   (4) $dy=5x^{5x}(1+\ln x)dx$　　(5) $dy=\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)dx$

   (6) $dy=(\sin 2x+2x\cos 2x)dx$　　(7) $dy=2xe^{2x}(1+x)dx$

   (8) $dy=e^{-x}[\sin(3-x)-\cos(3-x)]dx$
3. (1) $2x+C$　(2) $\frac{3}{2}x^2+C$　(3) $\sin t+C$　(4) $-\frac{1}{2}\cos 2t+C$　(5) $\ln(1+x)+C$

   (6) $-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$　(7) $2\sqrt{x}+C$　(8) $\frac{1}{3}\tan 3x+C$
4. $\sqrt{2}\approx 1.414$

习题 2-4

1. 可取 $\xi=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\in(-1,1)$，使得 $f'(\xi)=0$
2. 有分别位于区间(1,2)，(2,3)及(3,4)内的 3 个根
3. 略
4. $\xi=\sqrt{2}$

*5. 在闭区间[1,2]上，可取 $\xi=\frac{14}{9}$，使得$\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=\frac{3\xi^2}{2\xi}$成立

习题 2-5

1. (1) $\frac{\ln 2}{\ln 3}$　(2) 1　(3) 2　(4) $\frac{1}{6}$　(5) 1　(6) 0　(7) 1　(8) 0　(9) $2a$　(10) $+\infty$

   (11) 0　(12) 0　(13) 1　(14) 1
2. 略

习题 2-6

1. 函数 $f(x)$在区间$(-\infty,1)$和$(2,+\infty)$上单调递增，而在区间(1,2)上单调递减
2. 单调递减
3. 提示：令 $f(x)=2\sqrt{x}-\left(3-\frac{1}{x}\right)$，只要证 $f(x)>0(x>1)$即可

4. (1) 函数极大值为 $f(-1)=10$，极小值为 $f(3)=-22$

(2) 函数极大值为 $f(0)=0$，极小值为 $f\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{3}{25}\sqrt[3]{20}$

(3) 函数的极大值为 $f(0)=5$，极小值为 $f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})=1$

(4) 极小值为 $f(0)=0$

(5) 极小值为 $f(0)=0$

(6) 没有极值

5. (1) 函数 $f(x)$ 在 $[-3,4]$ 上的最大值为 $f(4)=142$，最小值为 $f(1)=7$

(2) 函数 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上的最大值为 $f\left(\frac{4}{9}\right)=\frac{4}{27}$，最小值为 $f(4)=-4$

6. 长为 10m，宽为 5m

7. 当年产量 $x=300$ 单位时，总利润最大，且最大利润为 $L(300)=25000$ 元

8. 设 $AD=x$，当 $x=15$ 时，CDB 总运费最省

习题 2-7

1. (1) 凹的 (2) 凸的 (3) 凹的 (4) 凹的

2. (1) 在区间 $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上是凹的，在区间 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 上是凸的，曲线的拐点为 $\left(-\frac{1}{2},20\frac{1}{2}\right)$

(2) 在区间 $(2,+\infty)$ 上是凹的，在区间 $(-\infty,2)$ 上是凸的，曲线的拐点为 $(2,3)$

(3) 在区间 $(2,+\infty)$ 上是凹的，在区间 $(-\infty,2)$ 上是凸的，曲线的拐点为 $\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$

(4) 在区间 $(-1,1)$ 上是凹的，在区间 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$ 上是凸的，曲线的拐点为 $(-1,\ln 2)$

(5) 处处是凹的，没有拐点

(6) 在区间 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 上是凹的，在区间 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上是凸的，曲线的拐点为 $\left(\frac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}}\right)$

3. $a=-2$，$b=6$

4. 略

习题 2-8

1. (1) $C(10)=185$，$\overline{C}(10)=18.5$，$C'(10)=11$

(2) 当 $x=20$ 时，平均成本最小

2. 当 $q=140$ 时，平均成本最小，此时的平均成本为 $\overline{C}(140)=176$ 元/件

3. 当售价 $p=25$ 时可使利润达到最大，且最大利润为 $L(25)=225$ 元

4. 当产量为 250 件时可使利润达到最大，且最大利润为 $L(250)=1230$ 元

5. (1) $E_d=\frac{p}{Q}\cdot Q'(p)=\frac{p}{12-\frac{p}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{p}{24-p}$

(2) $E_d(6)\approx-0.333$。它的经济含义是：在价格为6时，若价格增加1%，则需求量减少0.333%

*习题 2-9

1. $K=0$
2. $K=2$
3. 在点$\left(-\frac{1}{2}\ln 2,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$处曲率最大
4. $K=2,\rho=\frac{1}{2}$
5. $K=\frac{2a}{(1+4a^2x^2)^{\frac{3}{2}}},\rho=\frac{(1+4a^4)^{\frac{3}{2}}}{2a}$

习题 3-1

1. (1) $\arctan x+C$ (2) $-2\sin x+C$

(3) $\frac{x^3}{3}+C$ (4) $e^x+\sin x+C$

(5) $\ln|x|+C$ (6) $\sin x+\cos x+C$

2. (1) $\frac{1}{2}x^6+C$ (2) $\frac{9}{8}x^{\frac{8}{3}}+C$

(3) $-\frac{1}{2x^2}+C$ (4) $\frac{2}{3}\sqrt{x}+C$

(5) $-\cos x-\sin x+C$ (6) $\frac{a^x e^x}{\ln a+1}+C$

(7) $3x-5\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\frac{3}{2}}+C$ (8) $3e^x+2\ln|x|+C$

(9) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$ (10) $\frac{1}{2}(x-\sin x)+C$

(11) $-\cot x-x+C$ (12) $\tan x-\cot x+C$

(13) $x-3\arctan x+C$ (14) $x^3-x+\arctan x+C$

(15) $-\cot x+\csc x+C$ (16) $\frac{1}{e}e^x+C$

3. $\cos x+e^x$
4. $2\cos\frac{x^2}{2}-2x^2\sin\frac{x^2}{2}$

习题 3-2

(1) $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$

(2) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(3-2x)^2}+C$

(3) $-\cot\frac{x}{2}+C$

(4) $\frac{1}{2}\sin(2x-5)+C$

(5) $-e^{\frac{1}{x}}+C$

(6) $e^{\sin x}+C$

(7) $\frac{1}{2}(2+\ln x)^2+C$

(8) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$

(9) $\frac{1}{6}(x^2-3x+2)^6+C$

(10) $\frac{1}{-2\sin^2 x}+C$

(11) $\frac{2}{9}\sqrt{(5+3e^x)^3}+C$

(12) $\frac{1}{2}[\ln(1+x)]^2+C$

(13) $-2\cos(\sqrt{x}-1)+C$

(14) $\ln(e^x+1)+C$

(15) $\frac{1}{6}\sin^6 x+C$

(16) $\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3}{2}x\right)+C$

(17) $-\frac{1}{2}\cos x^2+C$

(18) $\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+C$

(19) $\ln|\ln x|+C$

(20) $-\cos\left(x+\frac{1}{x}\right)+C$

(21) $e^{\sqrt{1+x^2}}+C$

(22) $\sin(\sin\varphi)+C$

(23) $x-2\sqrt{x}+2\ln(1+\sqrt{x})+C$

(24) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln(1+\sqrt[3]{x+1})+C$

(25) $x-4\sqrt{x+1}+4\ln(1+\sqrt{x+1})+C$

(26) $\frac{1}{4}\arcsin 2x+\frac{x}{2}\sqrt{1-4x^2}+C$

(27) $\frac{x}{9\sqrt{9+x^2}}+C$

(28) $3\arcsin\frac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}+C$

习题 3-3

1. (1) $\sin x-x\cos x+C$

(2) xe^x+C

(3) $x\ln x-x+C$

(4) $x\operatorname{arccot} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

(5) $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C$

(6) $\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$

(7) $\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$

(8) $e^x\ln x+C$

(9) $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$ (10) $\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}\right)e^{4x}+C$

(11) $\frac{x^2a^x}{\ln a}-\frac{2xa^x}{\ln^2 a}+\frac{2a^x}{\ln^3 a}+C$ (12) $x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+C$

2. $xf'(x)-f(x)+C$

* 习题 3-4

(1) $\frac{8}{7}\ln|x-2|-\frac{1}{7}\ln|x+5|+C$

(2) $\frac{2}{5}\ln|1+2x|-\frac{1}{5}\ln(1+x^2)+\frac{1}{5}\arctan x+C$

(3) $\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)-\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$

(4) $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$

(5) $2\sqrt{x}-2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+C$

(6) $2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[6]{x+1}+6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1)+C$

习题 3-5

1. (1) 1 (2) $\frac{\pi R^2}{4}$ (3) 0 (4) 0

2. 略

3. (1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 较大 (2) $\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$ 较大 (3) $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$ 较大 (4) $\int_0^1 e^x\mathrm{d}x$ 较大

习题 3-6

1. (1) $2\ln 2$ (2) $2\sqrt{3}$ (3) $\frac{1}{101}$ (4) $\frac{14}{3}$ (5) $e-1$ (6) $\frac{99}{\ln 100}$ (7) 1

   (8) $\frac{1}{2}(e-1)$ (9) -1 (10) $4-2\sqrt{2}$ (11) $\frac{1}{4}$ (12) 2 (13) $\frac{\ln^3 2}{3}$ (14) $\frac{1}{2}$

2. (1) 1 (2) 2

3. (1) $2x\cdot f(x^2)$ (2) $-f(x)$

习题 3-7

(1) π (2) $\frac{8}{3}$ (3) $\frac{\pi}{8}-\frac{\ln 2}{4}$ (4) $\frac{\pi}{4}$ (5) $4-2\ln 3$ (6) $\frac{\pi}{16}$ (7) $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}-\ln 2$

(8) $4(2\ln 2-1)$ (9) 0 (10) 2π

习题 3-8

1. （1）$\frac{1}{100}e^{-100}$　（2）$\frac{\pi}{20}$

*2. $3\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}$

*3. 不正确。详解略。

习题 3-9

1. 18

2. $\frac{1}{3}\pi hr^2$

3. $\frac{4}{3}\pi a^2 b$

*4. $5\pi^2 a^3, 6\pi^3 a^3$

*5. $8a$

*6. $8a$

7. 9

习题 3-10

1. 0.5J

2. $1+\frac{1}{e^2}$

3. $\frac{kq}{a}$

4. 0.09J

5. （1）略　（2）9.72×10^5kJ

6. $\frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}a^{\frac{7}{3}}$

习题 4-1

1. （1）是，一阶　（2）不是　（3）是，二阶　（4）是，一阶　（5）是，三阶　（6）是，一阶

2. （1）是，通解　（2）是，特解　（3）是，通解　（4）不是

3. $y=\frac{1}{2}x+2$

4. $y=k\ln x+2$

习题 4-2

1. （1）$1+y^2=Ce^{-\frac{1}{x}}$　（2）$r=C\cos\theta$

(3) $e^{y^2}=C(1+e^x)^2$ (4) $\arctan y=x+\frac{1}{2}x^2+C$

(5) $\ln y+\frac{1}{2}y^2=\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}e^{-2}-2$ (6) $\ln y=\pm\sqrt{1-\frac{2}{x}}$

(7) $\ln y-\frac{1}{2}y^2=x-\arctan x+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$ (8) $y^2=3(x-1)^2+1$

*2. (1) $\ln|y|=\frac{y}{x}+C$ (2) $y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2$

(3) $\ln\frac{y}{x}=Cx+1$ (4) $y^2=x^2(2\ln|x|+C)$

3. (1) $y=Ce^{-x}$ (2) $y=C(x+1)^2$

(3) $y=Ce^{\frac{x}{2}}+e^x$ (4) $y=-2(e^{-3x}+e^{-5x})$

(5) $y=(x+1)e^x$ (6) $y=\frac{1}{x}(\sin x+\pi)$

*4. $v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$

习题 4-3

1. (1) $y=\frac{x^4}{24}+\cos x+C_1x^2+C_2x+C_3$

(2) $y=\frac{1}{8}e^{2x}+\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$

(3) $y=(x-3)e^x+C_1x^2+C_2x+C_3$

(4) $y=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$

(5) $y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2$

(6) $y=C_1e^x-\frac{1}{2}x^2-x+C_2$

2. (1) $y=e^x-\frac{e}{2}x^2-\frac{e}{2}$

(2) $y=\frac{1}{a^3}e^{ax}-\frac{e^a}{2a}x^2-\frac{e^a}{a^2}(a-1)x+\frac{e^a}{2a^3}(2a-a^2-2)$

(3) $y=\left(1+\frac{x}{2}\right)^4$

(4) $y=\ln\sec x$

习题 4-4

1. (1) $y=C_1e^{-4x}+C_2e^x$ (2) $s=C_1+C_2e^{2t}$

(3) $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$ (4) $y=C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x$

(5) $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$ (6) $y=C_1+C_2e^{5x}$

2. （1）$y=e^x+3e^{3x}$　　（2）$y=\frac{3}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}$

（3）$y=\sin 3x$

3. （1）$y''-y'-6y=0, y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}$

（2）$y''-2y'+y=0, y=(C_1+C_2x)e^x$

（3）$y''+4y'+5y=0, y=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

4. （1）$y^*=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$　　（2）$y^*=\left(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)e^x$

（3）$y^*=xe^x$　　（4）$y^*=\frac{1}{4}e^{2x}$

（5）$y^*=\frac{1}{5}\cos x-\frac{7}{5}\sin x$　　（6）$y^*=\frac{x}{2\omega}\sin\omega x$

5. （1）$y=-5e^x+\frac{7}{2}e^{2x}+\frac{5}{2}$　　（2）$y=e^x-e^{-x}+e^x(x^2-x)$

*6. $s=\frac{m^2g}{k^2}(e^{-\frac{k}{m}t}-1)+\frac{m}{k}gt$

*7. $s=\sin t(1-\cos t)$

习题 5-1

1. $(-3,-10,-2)$
2. 略
3. $\boldsymbol{x}=(3,-4,15), \boldsymbol{y}=(5,-7,24)$
4. A 点在第四卦限，B 点在第五卦限，C 点在第八卦限，D 点在第三卦限
5. 略
6. 点 A 到 x 轴的距离 $d_1=\sqrt{10}$，点 A 到 y 轴的距离 $d_2=\sqrt{5}$，点 A 到 z 轴的距离 $d_3=\sqrt{13}$
7. $(0,1,-2)$
8. $\pm\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)$
9. 模：2；方向余弦：$\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}$；方向角：$\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{3}$
10. 1

习题 5-2

1. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　2. $\sqrt{3}$　3. $-10, -2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$　4. $5,(7,1,11),-30,(21,3,33)$

5. $\frac{2}{\sqrt{154}}$　6. $\pm\frac{1}{5\sqrt{2}}(5,0,-5)$　7. $\frac{\pi}{3}$　8. $\frac{11}{\sqrt{6}}$　9. $\frac{1}{2}\sqrt{166}$　10. $\lambda=2\mu$

习题 5-3

1. $4x+4y+10z-63=0$
2. 球心在点 $M(1,-2,0)$，半径为 $R=\sqrt{10}$ 的球面
3. $y^2+z^2=3x$
4. $2x^2-y^2-z^2=15$；$2x^2+2y^2-z^2=15$
5. 略
6. (1) zOx 平面上的椭圆曲线 $\frac{x^2}{3}+\frac{z^2}{9}=1$ 绕 z 轴旋转一周而成的旋转曲面，或表示 yOz 平面上的椭圆曲线 $\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{9}=1$ 绕 z 轴旋转一周而成的旋转曲面

   (2) xOy 平面上的双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 绕 y 轴旋转一周而成的旋转曲面，或表示 yOz 平面上的双曲线 $z^2-\frac{y^2}{3}=1$ 绕 y 轴旋转一周而成的旋转曲面

习题 5-4

1. $3x^2+2z^2=7$
2. 略
3. $\begin{cases} x^2+2y^2-4y=-1 \\ z=0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y^2+z^2-2z=3 \\ x=0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-ax} \\ y=0 \end{cases}$
6. (1) $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=2\sin t \\ z=\sqrt{2}\cos t \end{cases}\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$

   (2) $\begin{cases} x=0 \\ y=1+\cos t \\ z=2+\sin t \end{cases}\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$
7. $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=0 \end{cases}$，$\begin{cases} y=a\sin\frac{z}{b} \\ x=0 \end{cases}$，$\begin{cases} x=a\cos\frac{z}{b} \\ y=0 \end{cases}$

习题 5-5

1. $x-2y+4z-9=0$

2. $2x-y-z=0$

3. $x+3y-2z-14=0$

4. （1）yOz 平面　（2）平行于 xOz 的平面
   （3）平行于 x 轴的平面　（4）通过 y 轴的平面

5. $\theta=\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{42}$

6. $-4y+z+2=0$

7. $2x+y=0$

8. $y+1=0$

9. $8x+4y-z-8=0$

10. $x-3y-2z=0$

11. 2

习题 5-6

1. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$，$\begin{cases}x=1+5t\\y=-3+2t\\z=-1-t\end{cases}$

2. $\begin{cases}y-2=0\\\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{z-3}{2}\end{cases}$

3. $\begin{cases}x=1=0\\y-3=0\end{cases}$

4. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-4}{5}$

5. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{1}$

6. $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+1}{5}$

7. $16x-14y-11z-59=0$

8. $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$

9. $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$

10. $\varphi=0$

11. （1）垂直　（2）平行

12. $\left(-\dfrac{3}{2},1,\dfrac{1}{2}\right)$

习题 6-1

1. $V=\frac{1}{3}\pi(l^2-h^2)h$

2. $2, y^2$

3. $\sin^2(x+y)+e^{2xy}$

4. (1) $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|<1\}$ (2) $D=\{(x,y)\,|\,x\geqslant y^2\}$

(3) $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$ (4) $D=\{(x,y)\,|\,4x^2+9y^2\geqslant 36\}$

(5) 要使该函数有意义,需满足

$$\begin{cases}|x-1|\leqslant 1\\ y\geqslant 0\end{cases},\quad 即\quad \begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\ y\geqslant 0\end{cases}$$

所以函数的定义域为 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 2, y\geqslant 0\}$

(6) $D=\{(x,y)\,|\,-1\leqslant x\leqslant 1, -2\leqslant y\leqslant 2\}$

(7) $D=\{(x,y)\,|\,x+y>0, x-y>0\}$

*(8) $D=\{(x,y,z)\,|\,r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$

5. (1) 1 (2) 0 (3) 2 (4) -4 *(5) $\frac{1}{2}$ *(6) $-\frac{1}{2}$

*6. 函数 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$处无极限(提示:考虑动点分别沿 x 轴和 y 轴趋于点$(0,0)$时,相应的极限)

习题 6-2

1. (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+3xy^2$ (2) $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}+2y$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y^2}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x}$ (4) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}$

(5) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (6) $\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\sin(y^2)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2ye^x\cos(y^2)$

(7) $\frac{\partial z}{\partial x}=(x+1)e^x\tan y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=xe^x\sec^2 y$ *(8) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$

*(9) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}\cdot x^{\frac{y}{z}-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}\cdot x^{\frac{y}{z}}\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}\cdot x^{\frac{y}{z}}\ln x$

*(10) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$

2. (1) $z''_{xx}=8y^3$, $z''_{xy}=z''_{yx}=24xy^2$, $z''_{yy}=24x^2y-20y^3$

(2) $z''_{xx}=\frac{x+2y}{(x+y)^2}$, $z''_{xy}=z''_{yx}=\frac{y}{(x+y)^2}$, $z''_{yy}=\frac{-x}{(x+y)^2}$

(3) $z''_{xx}=y^2e^{xy}$, $z''_{xy}=z''_{yx}=(1+xy)e^{xy}$, $z''_{yy}=x^2e^{xy}$

(4) $z''_{xx}=2\cos(x^2+y^2)-4x^2\sin(x^2+y^2)$, $z''_{xy}=z''_{yx}=-4xy\sin(x^2+y^2)$

$z''_{yy}=2\cos(x^2+y^2)-4y^2\sin(x^2+y^2)$

3. $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=3$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=1$，$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=6$，

$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=3$，$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=1$，$\left.\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=6$

4. (1) $dz=[2xy-y\cos(xy)]dx+[x^2-x\cos(xy)]dy$

(2) $dz=e^x\ln y dx+\frac{e^x}{y}dy$

(3) $dz=ye^{xy}dx+xe^{xy}dy$

(4) $dz=\frac{6x}{3x^2-2y}dx-\frac{2}{3x^2-2y}dy$

(5) $dz=\frac{2y}{(x+y)^2}dx-\frac{2x}{(x+y)^2}dy$

(6) $dz=\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$

*(7) $du=zy^{xz}\ln y dx+xzy^{xz-1}dy+xy^{xz}\ln y dz$

5. 27

*6. 2.039

*7. 129.368

习题 6-3

1. (1) $\frac{dz}{dx}=\frac{\cos x+2x}{\sin x+x^2}$　(2) $\frac{dz}{dx}=e^{\frac{\tan x}{x}}\left(\frac{\sec^2 x}{x}-\frac{\tan x}{x^2}\right)$

2. (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=4x(x^2+y)\ln(x+y^2)+\frac{(x^2+y)^2}{x+y^2}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=2(x^2+y)\ln(x+y^2)+\frac{2y(x^2+y)^2}{x+y^2}$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=2y\sin(2xy)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2x\sin(2xy)$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'(xy,y^2)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=xf_1'(xy,y^2)+2yf_2'(xy,y^2)$

*(5) $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'(x,xy,xyz)+yf_2'(x,xy,xyz)+yzf_3'(x,xy,xyz)$

$\frac{\partial u}{\partial y}=xf_2'(x,xy,xyz)+xzf_3'(x,xy,xyz)$，$\frac{\partial u}{\partial z}=xyf_3'(x,xy,xyz)$

3. (1) $\frac{dz}{dx}=-\frac{y}{x}$　(2) $\frac{dz}{dx}=\frac{1-x}{y}$

(3) $\frac{dy}{dx}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$　(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y}{1-xe^y}$

4. (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{3z^2-xy}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{3z^2-xy}$　(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-x}{z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\cos x\sin y}{e^z}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sin x\cos y}{e^z}$ (4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{2yz-x}, \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-z^2}{2yz-x}$

(5) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x^2-yz}{z^2-xy}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y^2-xz}{z^2-xy}$

(6) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y-e^z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z}{y-e^z}$

(7) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{z}{x}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z}{y(2xz+1)}$

(8) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{3}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{3}$

习题 6-4

1. 切线：$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{3}$

   法平面：$x-2y+3z+6=0$

2. 切线：$x-\frac{1}{2}=\frac{y-2}{-16}=\frac{z-2}{4}$

   法平面：$x-16y+4z+\frac{47}{2}=0$

3. 切平面：$2x+4y-z-5=0$

   法线：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}$

4. 切平面：$x+2y-4=0$

   法线：$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{0}\left(或\begin{cases}y=2x-3\\z=0\end{cases}\right)$

5. 切平面：$x+11y+5z-18=0$

   法线：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{5}$

6. (1) 极大值 $f(0,0)=0$ (2) 极大值 $f(3,2)=36$ (3) 极大值 $f(2,-2)=8$

   (4) 极小值 $f(1,0)=-5$，极大值 $f(-3,2)=31$

7. 当水箱的长、宽、高分别为 2m、2m、1m 时，水箱所用材料最省

*8. 当两直角边都是$\frac{l}{\sqrt{2}}$时，周长最大

*9. $Q'_L(128,8)=\frac{15}{8}, Q'_K(128,8)=90$

习题 7-1

1. (1) 3π (2) $\frac{2}{3}\pi R^3$

2. (1) $I_1\geqslant I_2$ (2) $I_1\leqslant I_2$

3.（1）$0\leqslant I\leqslant 2$ （2）$36\pi\leqslant I\leqslant 100\pi$ （3）$\frac{9\pi}{5}\leqslant I\leqslant\frac{9\pi}{4}$

*4. $Q=\iint\limits_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$

习题 7-2

1.（1）X 型表示：$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1-x\}$

Y 型表示：$\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant 1-y\}$

（2）X 型表示：$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,x\leqslant y\leqslant 2x\}\cup\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,x\leqslant y\leqslant 2\}$

Y 型表示：$\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 2,\frac{y}{2}\leqslant x\leqslant y\}$

（3）X 型表示：$\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant 2\}$

Y 型表示：$\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1,\frac{1}{y}\leqslant x\leqslant 2\right\}\cup\{(x,y)\mid 1\leqslant y\leqslant 2,1\leqslant x\leqslant 2\}$

（4）X 型表示：$\{(x,y)\mid -2\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}\}$

Y 型表示：$\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 2,-\sqrt{4-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2}\}$

2.（1）201 （2）e^{-2} （3）$\frac{1}{6}(\mathrm{e}^{14}-\mathrm{e}^{13}-\mathrm{e}^{-4}+\mathrm{e}^{-5})$ （4）$\frac{20}{3}$

（5）$\frac{6}{55}$ （6）$\frac{9}{4}$ （7）$\frac{\sin 1}{2}$

3. $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^4\mathrm{d}x\int_x^{2\sqrt{x}}f(x,y)\mathrm{d}y$

$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^4\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{4}}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x$

4.（1）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$

（2）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y$

（3）$\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^2 f(x,y)\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}y\int_1^y f(x,y)\mathrm{d}x$

（4）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1 f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}y$

5.（1）$-6\pi^2$ （2）$\pi(\mathrm{e}^4-1)$ （3）$\frac{3\pi^2}{64}$ （4）$\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$ （5）$\frac{3}{2}$

习题 7-3

1.（1）$\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}z$ （2）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{xy}f(x,y,z)\mathrm{d}z$

2. $\frac{3}{2}$ 3. 27 4. $\frac{1}{48}$ 5. $\frac{\pi}{4}h^2R^2$

6. (1) $\frac{16}{3}\pi$ (2) $\frac{7\pi}{12}$

*7. 8π

*8. $\frac{4\pi a^3}{3}(1-\cos^4 a)$(提示：球面的方程为 $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$，即 $x^2+y^2+z^2=2az$。在球面坐标下此球面的方程为 $r^2=2ar\cos\varphi$，即 $r=2a\cos\varphi$)

习题 7-4

(1) $R^3(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)$ (2) $\sqrt{2}$ (3) $2\pi R^{2n+1}$ (4) $e^R\left(2+\frac{\pi}{4}R\right)-2$ (5) 9

*(6) $\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2})$

习题 7-5

1. (1) 0 (2) $\frac{4}{5}$ (3) -2π (4) $-\frac{87}{4}$ (5) $\frac{1}{2}$

2. (1) $\int_L \frac{P(x,y)+Q(x,y)}{\sqrt{2}}ds$ (2) $\int_L \frac{P(x,y)+2xQ(x,y)}{\sqrt{1+4x^2}}ds$

习题 7-6

1. $\frac{3}{8}\pi a^2$

*2. (1) 12 (2) $-\pi ab$ (3) 0 (4) $\frac{\pi a^2 m}{8}$

3. (1) $\frac{5}{2}$ (2) 236 (3) 62 (4) $\int_2^1 \varphi(x)dx+\int_1^2 \psi(y)dy$

4. (1) $\frac{1}{2}x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2$ (2) $\frac{1}{2}x^2y^2$ (3) x^2y (4) $\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}$

5. 略

习题 8-1

1. (1) $u_n=\frac{1}{2n-1}$ (2) $u_n=\frac{n+2}{2^n}$

   (3) $u_n=1-\frac{1}{10^n}$ (4) $u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

2. (1) $S_n=3\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$，收敛 (2) $S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，发散

(3) $S_n=\sqrt{n+1}-1$，发散　　(4) $S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$，收敛

3. (1) 发散　(2) 发散　(3) 收敛　(4) 收敛　(5) 发散　(6) 收敛　(7) 发散　(8) 收敛

习题 8-2

1. (1) 发散　(2) 收敛　(3) 收敛　(4) 发散　(5) 发散　(6) 收敛
2. (1) 发散　(2) 收敛　(3) 收敛　(4) 收敛　(5) 收敛　(6) 发散
3. (1) 收敛　(2) 发散　(3) 收敛　(4) 收敛　(5) 收敛　(6) 收敛
4. (1) 绝对收敛　(2) 绝对收敛　(3) 发散　(4) 绝对收敛　(5) 条件收敛　(6) 条件收敛

习题 8-3

1. (1) $R=1,[-1,1)$　　(2) $R=1,(-1,1)$

(3) $R=3,(-3,3)$　　(4) $R=\frac{1}{5},\left[-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$

(5) $R=1,(-1,1]$　　(6) $R=5,[-5,5)$

(7) $R=1,[0,2)$　　(8) $R=1,[-3,-1)$

(9) $R=1,[-1,1)$　　(10) $R=\frac{1}{3},\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$

2. (1) $S(x)=\frac{1}{(1+x)^2},|x|<1$　　(2) $S(x)=\arctan x,|x|<1$

(3) $S(x)=-\ln(1-x),x\in[-1,1)$　　(4) $S(x)=\frac{1}{(1-x)^2},x\in(-1,1)$

(5) $S(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x,|x|<1$

(6) $S(x)=\frac{1}{(1-x)^3},|x|<1$

习题 8-4

1. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^nx^n,x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$
2. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}(x-3)^n,x\in(0,6)$
3. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-1)^n,x\in(0,2)$
4. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1},x\in(0,2)$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in (-\infty, +\infty)$

6. $e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty)$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n, x \in (-\infty, +\infty)$

8. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{2n!}\right], x \in (-\infty, +\infty)$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x+1)^n, x \in (-2, 0)$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x+2)^n, x \in (-3, -1)$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right)(x+5)^n, x \in (-8, -2)$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x+3)^n, x \in (-4, -2)$

附录B

常用积分公式

B.1　含有 $ax+b$ 的积分($a\neq 0$)

1. $\int \frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$

2. $\int (ax+b)^{\mu}dx=\frac{1}{a(\mu+1)}(ax+b)^{\mu+1}+C\quad(\mu\neq -1)$

3. $\int \frac{x}{ax+b}dx=\frac{1}{a^2}(ax+b-b\ln|ax+b|)+C$

4. $\int \frac{x^2}{ax+b}dx=\frac{1}{a^3}\left[\frac{1}{2}(ax+b)^2-2b(ax+b)+b^2\ln|ax+b|\right]+C$

5. $\int \frac{dx}{x(ax+b)}=-\frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C$

6. $\int \frac{dx}{x^2(ax+b)}=-\frac{1}{bx}+\frac{a}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C$

7. $\int \frac{x}{(ax+b)^2}dx=\frac{1}{a^2}\left(\ln|ax+b|+\frac{b}{ax+b}\right)+C$

8. $\int \frac{x^2}{(ax+b)^2}dx=\frac{1}{a^3}\left(ax+b-2b\ln|ax+b|-\frac{b^2}{ax+b}\right)+C$

9. $\int \frac{dx}{x(ax+b)^2}=\frac{1}{b(ax+b)}-\frac{1}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C$

B.2　含有 $\sqrt{ax+b}$ 的积分

10. $\int \sqrt{ax+b}\,dx=\frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3}+C$

11. $\int x\sqrt{ax+b}\,dx=\frac{2}{15a^2}(3ax-2b)\sqrt{(ax+b)^3}+C$

12. $\int x^2\sqrt{ax+b}\,dx=\frac{2}{105a^3}(15a^2x^2-12abx+8b^2)\sqrt{(ax+b)^3}+C$

13. $\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}dx=\frac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b}+C$

14. $\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2}{15a^3}(3a^2x^2 - 4abx + 8b^2)\sqrt{ax+b} + C$

15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C & b > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-b}}\arctan\sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C & b < 0 \end{cases}$

16. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

17. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

18. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

B.3 含有 $x^2 \pm a^2$ 的积分

19. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

20. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$

21. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

B.4 含有 $ax^2+b(a>0)$ 的积分

22. $\int \frac{dx}{ax^2+b} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\sqrt{\frac{a}{b}}x + C & b > 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{a}x-\sqrt{-b}}{\sqrt{a}x+\sqrt{-b}}\right| + C & b < 0 \end{cases}$

23. $\int \frac{x}{ax^2+b}dx = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+b| + C$

24. $\int \frac{x^2}{ax^2+b}dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{ax^2+b}$

25. $\int \frac{dx}{x(ax^2+b)} = \frac{1}{2b}\ln\frac{x^2}{|ax^2+b|} + C$

26. $\int \frac{dx}{x^2(ax^2+b)} = -\frac{1}{bx} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{ax^2+b}$

27. $\int \frac{dx}{x^3(ax^2+b)} = \frac{a}{2b^2}\ln\frac{|ax^2+b|}{x^2} - \frac{1}{2bx^2} + C$

28. $\int \frac{dx}{(ax^2+b)^2} = \frac{x}{2b(ax^2+b)} + \frac{1}{2b}\int \frac{dx}{ax^2+b}$

B.5 含有 $ax^2+bx+c(a>0)$ 的积分

29. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C & b^2<4ac\\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C & b^2>4ac\end{cases}$$

30. $$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c|-\frac{b}{2a}\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$$

B.6 含有 $\sqrt{x^2+a^2}\,(a>0)$ 的积分

31. $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\mathrm{arsh}\,\frac{x}{a}+C_1=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

32. $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C$$

33. $$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2+a^2}+C$$

34. $$\int\frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}+C$$

35. $$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

36. $$\int\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\mathrm{d}x=-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

37. $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{a}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|}+C$$

38. $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C$$

39. $$\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

40. $$\int\sqrt{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2}+\frac{3}{8}a^4\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

41. $$\int x\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+a^2)^3}+C$$

42. $$\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

43. $$\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2+a^2}+a\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|}+C$$

44. $$\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}+\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

B.7 含有 $\sqrt{x^2-a^2}\,(a>0)$ 的积分

45. $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x}{|x|}\mathrm{arch}\,\frac{|x|}{a}+C_1=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$

46. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C$

47. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \sqrt{x^2-a^2}+C$

48. $\int \frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}+C$

49. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

50. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

51. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{|x|}+C$

52. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+C$

53. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

54. $\int \sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2}+\frac{3}{8}a^4\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

55. $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3}+C$

56. $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

57. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{|x|}+C$

58. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

B.8 含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$ 的积分

59. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$

60. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C$

61. $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\sqrt{a^2-x^2}+C$

62. $\int \frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}dx = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$

63. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

64. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}dx = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{a}+C$

65. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}+C$

66. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C$

67. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

68. $\int \sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx = \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3}{8}a^4\arcsin\frac{x}{a}+C$

69. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}+C$

70. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C$

71. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2-x^2}+a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}+C$

72. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C$

B.9　含有 $\sqrt{\pm ax^2+bx+c}\,(a>0)$ 的积分

73. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C$

74. $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}$

$+\frac{4ac-b^2}{8\sqrt{a^3}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C$

75. $\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}$

$-\frac{b}{2\sqrt{a^3}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C$

76. $\int \frac{dx}{\sqrt{c+bx-ax^2}} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

77. $\int \sqrt{c+bx-ax^2}\,dx = \frac{2ax-b}{4a}\sqrt{c+bx-ax^2}+\frac{b^2+4ac}{8\sqrt{a^3}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

78. $\int \frac{x}{\sqrt{c+bx-ax^2}}dx = -\frac{1}{a}\sqrt{c+bx-ax^2}+\frac{b}{2\sqrt{a^3}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

B.10　含有 $\sqrt{\pm\frac{x-a}{x-b}}$ 或 $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ 的积分

79. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}dx = (x-b)\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}+(b-a)\ln(\sqrt{|x-a|}+\sqrt{|x-b|})+C$

80. $\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx = (x-b)\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+(b-a)\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+C$

81. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C \quad (a < b)$

82. $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx = \frac{2x-a-b}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)} + \frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C \quad (a < b)$

B.11 含有三角函数的积分

83. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

84. $\int \cos x dx = \sin x + C$

85. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$

86. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

87. $\int \sec x dx = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C$

88. $\int \csc x dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C$

89. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

90. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

91. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

92. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

93. $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

94. $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

95. $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x dx$

96. $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x dx$

97. $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^{n-2}x}$

98. $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x}$

99. $\int \cos^m x \sin^n x dx = \frac{1}{m+n}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2}x\sin^n x dx$

$= -\frac{1}{m+n}\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x\sin^{n-2}x dx$

100. $\int \sin ax\cos bx\,dx = -\frac{1}{2(a+b)}\cos(a+b)x - \frac{1}{2(a-b)}\cos(a-b)x + C$

101. $\int \sin ax\sin bx\,dx = -\frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C$

102. $\int \cos ax\cos bx\,dx = \frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C$

103. $\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{a\tan\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C \quad (a^2>b^2)$

104. $\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{a\tan\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\tan\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}\right| + C \quad (a^2<b^2)$

105. $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) + C \quad (a^2>b^2)$

106. $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}{\tan\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}\right| + C \quad (a^2<b^2)$

107. $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b}{a}\tan x\right) + C$

108. $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x-b^2\sin^2 x} = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{b\tan x+a}{b\tan x-a}\right| + C$

109. $\int x\sin ax\,dx = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{1}{a}x\cos ax + C$

110. $\int x^2\sin ax\,dx = -\frac{1}{a}x^2\cos ax + \frac{2}{a^2}x\sin ax + \frac{2}{a^3}\cos ax + C$

111. $\int x\cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{1}{a}x\sin ax + C$

112. $\int x^2\cos ax\,dx = \frac{1}{a}x^2\sin ax + \frac{2}{a^2}x\cos ax - \frac{2}{a^3}\sin ax + C$

B.12　含有反三角函数的积分($a>0$)

113. $\int \arcsin\frac{x}{a}dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C$

114. $\int x\arcsin\frac{x}{a}dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2} + C$

115. $\int x^2\arcsin\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2} + C$

116. $\int \arccos\frac{x}{a}dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C$

117. $\int x\arccos\frac{x}{a}dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a} - \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2} + C$

118. $\int x^2\arccos\frac{x}{a}dx=\frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{a}-\frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}+C$

119. $\int \arctan\frac{x}{a}dx=x\arctan\frac{x}{a}-\frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)+C$

120. $\int x\arctan\frac{x}{a}dx=\frac{1}{2}(a^2+x^2)\arctan\frac{x}{a}-\frac{a}{2}x+C$

121. $\int x^2\arctan\frac{x}{a}dx=\frac{x^3}{3}\arctan\frac{x}{a}-\frac{a}{6}x^2+\frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2)+C$

B.13　含有指数函数的积分

122. $\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+C$

123. $\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C$

124. $\int xe^{ax}dx=\frac{1}{a^2}(ax-1)e^{ax}+C$

125. $\int x^n e^{ax}dx=\frac{1}{a}x^n e^{ax}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$

126. $\int xa^x dx=\frac{x}{\ln a}a^x-\frac{1}{(\ln a)^2}a^x+C$

127. $\int x^n a^x dx=\frac{1}{\ln a}x^n a^x-\frac{n}{\ln a}\int x^{n-1}a^x dx$

128. $\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)+C$

129. $\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)+C$

130. $$\int e^{ax}\sin^n bx\,dx=\frac{1}{a^2+b^2n^2}e^{ax}\sin^{n-1}bx(a\sin bx-nb\cos bx)+\frac{n(n-1)b^2}{a^2+b^2n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}bx\,dx$$

131. $$\int e^{ax}\cos^n bx\,dx=\frac{1}{a^2+b^2n^2}e^{ax}\cos^{n-1}bx(a\cos bx+nb\sin bx)+\frac{n(n-1)b^2}{a^2+b^2n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}bx\,dx$$

B.14　含有对数函数的积分

132. $\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C$

133. $\int\frac{dx}{x\ln x}=\ln|\ln x|+C$

134. $\int x^n\ln x\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$

135. $\int(\ln x)^n dx=x(\ln x)^n-n\int(\ln x)^{n-1}dx$

136. $\int x^m(\ln x)^n dx=\frac{1}{m+1}x^{m+1}(\ln x)^n-\frac{n}{m+1}\int x^m(\ln x)^{n-1}dx$

B.15 含有双曲函数的积分

137. $\int \mathrm{sh}x\,\mathrm{d}x = \mathrm{ch}x + C$

138. $\int \mathrm{ch}x\,\mathrm{d}x = \mathrm{sh}x + C$

139. $\int \mathrm{th}x\,\mathrm{d}x = \ln \mathrm{ch}x + C$

140. $\int \mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{sh}2x + C$

141. $\int \mathrm{ch}^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{sh}2x + C$

B.16 定积分

142. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x = 0$

143. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\,\mathrm{d}x = 0$

144. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$

145. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$

146. $\int_{0}^{\pi} \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} \cos mx \cos nx\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & m = n \end{cases}$

147. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$

$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$（$n$ 为大于 1 的正奇数），$I_1 = 1$

$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$（$n$ 为正偶数），$I_0 = \frac{\pi}{2}$